

Diplomarbeit

für

Herrn Jürgen Wetzelsberger, Matr.-Nr. 914853

Instabilitätsgrenzen eines teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllten Rotors

Bei teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Rotoren, in denen sich an der freien Oberfläche Wellen ausbilden können, entsteht in Abhängigkeit der Zähigkeit des Mediums ein breiter instabiler Drehzahlbereich.

Im ersten Teil der Arbeit ist an einem existierenden Versuchsrotor experimentell der instabile Drehzahlbereich zu bestimmen. Die vorhandene Lagerung mit innerer und äußerer Dämpfung engt den instabilen Bereich so weit wie möglich ein. Die Meßreihen sollen unter Variation verschiedener Parameter wie z. B. des Volumens der Wasser- und Ölfüllung oder der Füllhöhe des Öls für die äußere Dämpfung durchgeführt werden.

Im zweiten Teil sind die Bewegungsgleichungen mit Hilfe geeigneter Literatur herzuleiten und daraus komplexe Eigenformberechnungen durchzuführen. Bei der Modellierung des Systems soll die Wirkung der Wasser- und Ölfüllung voll berücksichtigt werden. Die Modellparameter sind unter Heranziehung der Massen- und Geometrieverhältnisse des Versuchsrotors geeignet zu wählen.

Der Vergleich von gemessenen und berechneten Eigenwerten sollen die Brauchbarkeit der Modellierung aufzeigen sowie Aufschlüsse über konstruktive Varianten geben.


Die Arbeit wird am Carl Gustav Carus Institut in Niefern-Öschelbronn durchgeführt.

Beginn: 01.11.94

Ende: 31.01.95

Betreuer: Dr. Reinhard Koehler, Carl Gustav Carus Institut;
Dipl.-Ing. Harald Wilhelm, FG Maschinendynamik

Darmstadt, den 02.08.94



(Prof. Dr.-Ing. H. Wölfel)

Instabilitätsgrenzen eines teilweise mit Wasser gefüllten Rotors unter Verwendung eines mitrotierenden Ölrings

Diplomarbeit

von

Jürgen Wetzelsberger



Fachgebiet Maschinendynamik
Technische Hochschule Darmstadt

Durchführung und Betreuung am
Carl - Gustav - Carus - Institut
Abteilung Physik
Niefern - Öschelbronn

Februar 1995
Darmstadt

*Wenn man von einer »streng objektiven Wissenschaft«
fordert, daß sie ihren Inhalt nur aus der Beobachtung entnehme,
so muß man zugleich fordern, daß sie auf alles Denken verzichte.
Denn dieses geht seiner Natur nach über das Beobachtete hinaus.*

(R. Steiner)

Herrn Dr. R. Koehler möchte ich für die Möglichkeit danken, diese Arbeit am Carl - Gustav - Carus - Institut in Öschelbronn durchzuführen. Außerdem danke ich ihm herzlich für seine wertvollen Anregungen und Erklärungen zum physikalischen Verständnis und zu theoretischen Grundlagen, ganz besonders aber für sein stetes Interesse und seine ständige Gesprächsbereitschaft zu allen die Arbeit betreffenden Fragen.

Der experimentelle Teil der Arbeit wäre ohne Herrn G. Schäfer nicht möglich gewesen. Auch ihm möchte ich herzlich danken, vor allem für die freundschaftliche Art, mit der er seine große Erfahrung zur Verfügung stellte.

Herr J. Hönerlage hat mir wichtige Hilfestellung und Erklärungen am PC gegeben. Dafür danke ich ihm herzlich.

Den Herren M. Beffert und G. Richter aus Chemie - bzw. Strömungslabor möchte ich ebenfalls für ihre wertvollen praktischen Hilfen danken.

Diese Diplomarbeit wurde, abgesehen von den angegebenen Hilfsmitteln und der Betreuung, selbständig angefertigt.

Darmstadt, 20.2.1995

J. Wetzel

Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit behandelt einen auf vertikaler, elastischer Welle in fliegender Anordnung gelagerten Rotor mit äußerer Dämpfung. Der Rotor trägt zwei näherungsweise zylindrische Hohlräume, die Flüssigkeit enthalten. Der eine der Hohlräume, die wir im folgenden Flüssigkeitsring nennen wollen, ist verfahrenstechnisch notwendig für eine pharmazeutische Aufgabenstellung und wird mit nahezu reibungsfreier Flüssigkeit gefüllt (sogen. Wasserring), der andere ist mit zäher Flüssigkeit gefüllt (sogen. Öllring) und dient zur inneren Dämpfung der Wellen im ersten Flüssigkeitsring. Denn es ist bekannt, daß die Wellenbewegung an der freien Oberfläche eines Flüssigkeitsringes den Rotor in breiten Drehzahlbereichen instabil macht. Das Motorgehäuse des Rotors ist unterhalb seines Schwerpunktes kardanisch gelagert, um auch eine leicht zu variierende äußere Dämpfung anzubringen. Die Stabilitätsgrenze und Dämpfungsreserve des Rotorsystems werden anhand folgender Fragen rechnerisch und experimentell untersucht:

1. Wie hängen die Stabilitätsgrenzen des Rotorsystems bei der Füllung eines der Hohlräume mit verschiedenen Flüssigkeiten von deren Viskosität und Dichte ab?
2. Welchen Einfluß hat die Viskosität der Flüssigkeit auf die innere Dämpfung, auf den Wert der Stabilitätsgrenze und die Dämpfungsreserve?
3. Wie ist die äußere Dämpfung einzustellen, damit sowohl die gefährlichen Eigenmoden des leeren Rotorsystems, Biegeschwingung (Gleichlauf) und Präzession (Gegenlauf), als auch die Ringwelle im Flüssigkeitsring (relativ zur Rotordrehrichtung entgegengesetzt umlaufend) am besten gedämpft werden?

Dazu werden im experimentellen Teil Versuche mit einem Rotor (\varnothing 376 mm) auf einem vorhandenen Versuchsstand durchgeführt, um die Drehzahl oberhalb der kritischen, von der ab beim Hochfahren Stabilität, bzw. beim Bremsen Instabilität eintritt, festzustellen, und im rechnerischen Teil werden die komplexen Eigenwerte des Rotorsystems mit einem am CARUS-Institut entwickelten Fortran - Programm numerisch berechnet. Diesem liegen die linearisierten Bewegungsgleichungen des Rotors auf fliegender Welle zu Grunde. Die Wirkung der Flüssigkeitsringe wird als zusätzliche äußere Kraft auf den Rotor formuliert und durch resultierende Kräfte, die den momentanen Rotorauslenkungen proportional sind, in die Bewegungsgleichungen eingeführt.

Als Ergebnis der Untersuchung kann festgehalten werden:

1. Die gemessene obere Stabilitätsgrenze des Rotorsystems ist nach den experimentellen Ergebnissen für die drei untersuchten Flüssigkeiten, Wasser, Glycerin und fluoriertes Öl, nahezu gleich. Die berechneten Werte der oberen Stabilitätsgrenze stimmen für die zähen Flüssigkeiten Glycerin und fluoriertes Öl recht gut mit den experimentellen Werten überein, bei Wasser zeigte

sich eine große Abweichung, die vermutlich auf erhöhte Reibung durch Turbulenz zurückzuführen ist. Ein unmittelbarer Vergleich der drei Flüssigkeiten hinsichtlich ihrer Stabilitätsgrenzen ist nicht möglich, da sie sich sowohl in der Dichte als auch in der Zähigkeit unterscheiden. Rechnungen, in denen diese beiden Parameter getrennt variiert werden können, ergeben, daß die obere Stabilitätsgrenze mit zunehmender Flüssigkeitsdichte und abnehmender Flüssigkeitszähigkeit größer wird.

2. Messungen zeigen, daß der Wert der Stabilitätsgrenze durch die zusätzliche innere Dämpfung kaum beeinflusst wird. Die berechneten Werte der Stabilitätsgrenze für den Rotor mit innerer Dämpfung stimmen recht gut mit den gemessenen überein. Rechnungen zeigen weiterhin, daß der Rotor durch die innere Dämpfung eine Stabilitätsreserve erhält, was vor allem für den Betrieb oberhalb des instabilen Drehzahlbereiches wichtig ist.

3. Das Optimum der Dämpfung für Präzession und Biegeschwingung des kleinen Versuchsrotors liegt nach den Versuchsergebnissen bei sehr kleinen Füllhöhen des Dämpferelements (Dämpfungskammer) des Rotorsystems. Es zeigt sich, daß bei diesen kleinen Füllhöhen andere Eigenmoden gefährlich schwach gedämpft werden, weswegen das Optimum selbst experimentell nicht bestimmt werden konnte. Rechnerisch liegt das Optimum der äußeren Dämpfung für Präzession und Biegeschwingung bei einer sehr kleinen Füllhöhe der Dämpfungskammer. Tatsächlich wurden Versuchsstand und Dämpfungskammer aber für viel größere Rotoren dimensioniert.

Eine experimentelle Aussage über die Dämpfung der Wasserringwelle war nicht möglich. Die Rechenergebnisse stimmen mit den im Experiment gefundenen Tendenzen der Dämpfung für Präzession und Biegeschwingung zusammen; es wird zusätzlich ein genauer Wert für das Optimum der Dämpfung dieser und fast aller übrigen Eigenmoden des Rotorsystems berechnet. Die Dämpfung der Wasserringwelle im 1. Flüssigkeitsring ist von der Füllhöhe in der Dämpfungskammer nahezu unabhängig, sie wird aber entscheidend von der Abstimmung ihrer Eigenfrequenz mit der Eigenfrequenz der Ölringwelle im 2. Flüssigkeitsring beeinflusst.

4. Die experimentellen Ergebnisse geben einen guten Einblick in das dynamische Verhalten des Rotors im vorgegebenen Versuchsstand. Die ausgeführten Berechnungen am idealisierten Rotorsystem zeigen, daß einem gegebenen, mit Flüssigkeit gefüllten Rotor, ausreichende Dämpfung in allen Eigenmoden gegeben werden kann.

Inhaltsverzeichnis	Seite
1. Einführung.....	1
2. Literaturübersicht und Grundlagen.....	4
2.1. Rotor symmetrisch zwischen zwei Lagern.....	4
2.1.1. Lavalrotor.....	4
2.1.1.1. Lavalrotor ohne Dämpfung.....	4
2.1.1.2. Lavalrotor mit Dämpfung.....	8
2.1.2. Der Flüssigkeitsring als Punktmasse.....	12
2.1.3. Wellenbewegung an der freien Flüssigkeitsoberfläche.....	14
2.1.3.1. Rotor ohne äußere Dämpfung.....	14
2.1.3.2. Rotor mit äußerer Dämpfung.....	16
2.2. Flüssigkeitsgefüllter, fliegend gelagerter Rotor.....	17
2.2.1. Kreiselphänomene.....	17
2.2.2. Eigenfrequenzen und kritische Drehzahl eines Rotorkreisels.....	20
2.2.2.1. Eigenfrequenzen.....	20
2.2.2.2. Kritische Drehzahlen.....	24
2.2.3. Fliegend gelagerter Rotor mit Flüssigkeitsfüllung.....	25
3. Konstruktive Gesichtspunkte.....	30
3.1. Flüssigkeitsring zur inneren Dämpfung.....	30
3.2. Fanglager zum Durchfahren instabiler Drehzahlbereiche.....	31
3.3. Dämpfungskammer.....	32
3.4. Motorpendel.....	33
3.5. Übersicht zu den Eigenmoden und deren Dämpfung.....	34
4. Berechnungsteil.....	36
4.1. Modell und Koordinaten.....	36
4.1.1. Beschreibung des mechanischen Modells.....	36
4.1.2. Festlegung der Koordinaten.....	38
4.2. Die Bewegungsgleichungen des Rotors auf fliegender Welle.....	42
4.2.1. Übersicht und Schnittbild.....	42
4.2.2. Aufstellen der Bewegungsgleichungen aus den Grundgleichungen.....	43
4.2.3. Ersetzen der allgemeinen Symbole.....	46
4.2.4. Bewegungsdifferentialgleichungen - Vollständige Bewegungsgleichungen des Rotor - Motorpendelsystems.....	52
4.3. Einführen der Kräfte und Momente der Flüssigkeitsfüllung.....	53
4.3.1. Übersicht.....	53
4.3.2. Komponenten von F_L und M_L	54
4.3.3. Resultierende Kräfte F_W und $F_{\ddot{O}}$	54
4.3.4. Bewegungsgleichungen Rotor - Motorpendelsystem mit Flüssigkeitsfüllung.....	60
4.5. Charakteristisches Polynom.....	62
4.6. Zur Lösung des charakteristischen Polynoms.....	63
5. Experimenteller Teil.....	66
5.1. Versuchsaufbau.....	66

5.1.1	Versuchsstand.....	66
5.1.1.1	Rotor.....	66
5.1.1.2.	Rotorwelle, Fanglager, Motorwelle und Dämpfungskammer.....	66
5.1.1.3.	Auffangring.....	67
5.1.2.	Meßtechnik.....	69
5.1.2.1.	Wegmeßsystem.....	69
5.1.2.2.	Meßweganzeige - speicherung - vorverstärkung - und auswertung.....	71
5.1.2.3.	Drehzahlmessung.....	72
5.1.2.4.	Viskositätsmessung.....	72
5.1.2.5.	Volumenmessung der verwendeten Flüssigkeiten.....	73
5.1.3.	Übersicht zum Versuchsstand.....	74
5.2.	Daten des Versuchsstandes.....	75
5.3.	Durchführung der Experimente.....	76
5.3.1.	Schwingungsmessungen.....	76
5.3.2.	Dämpfung der Eigenmoden.....	78
5.4.	Zur Bestimmung der Gesamtexzentrizität.....	80
5.4.1.	Bestimmung der Gesamtexzentrizität aus der gemessenen Amplitude der Biegeschwingung im überkritischen Drehzahlbereich.....	80
5.4.2.	Näherungsweise Bestimmung der Exzentrizität aus der Amplitude in der Biegeresonanz.....	83
5.5.	Fanglagerumschaltungen bei Rotoren mit kleinem und großem Kreiselmoment.....	85
6.	Ergebnisse.....	87
6.1.	Kritische Drehzahl leerer Rotor.....	87
6.2.	Instabiler Drehzahlbereich bei verschiedenen Flüssigkeiten im oberen Ring.....	87
6.2.1.	Verlauf der Rotoramplituden beim Passieren der Instabilität.....	87
6.2.2.	Obere Stabilitätsgrenze. Vergleich Messung - Rechnung.....	89
6.2.3.	Einfluß von Zähigkeit und Dichte.....	91
6.3.	Einfluß der Rotorbefestigung auf der Welle auf die Instabilitätsgrenze.....	92
6.4.	Stabilitätsgrenze bei verschiedenen Ölvolumina im unteren Ring.....	93
6.5.	Zusammenspiel Wassering - Öhring.....	93
6.6.	Zur Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit von Zähigkeit und Dichte der Flüssigkeit zur inneren Dämpfung.....	95
6.7.	Untersuchung der Dämpfung.....	96
6.7.1.	Experimentelle Untersuchung der Dämpfung.....	97
6.7.2.	Rechnerische Untersuchung der Dämpfung.....	100
6.7.3.	Vergleich Messung - Rechnung.....	110
6.8.	Zum Diagramm der Eigenfrequenzen des Rotorsystems.....	110
6.9.	Störfall.....	113
7.	Ausblick.....	116
	Literaturübersicht.....	118
	Anhang	

Verwendete Formelzeichen

a	innerer Spaltradius der Dämpfungskammer
a	Hohlraumradius
b	Radius der freien Oberfläche
c_{ij}	Steifigkeitszahlen
c^*	Ersatzfedersteifigkeit am Motorpendel
e	Exzentrizität
h	Füllhöhe Dämpfungskammer
j	imaginäre Einheit $=\sqrt{-1}$
k_{ij}	Steifigkeitszahlen
l_1	Freie Länge der Rotorwelle
l_2	Entfernung Rotorsitz - Rotorschwerpunkt
l_3	Hebelarm Dämpfungsmoment
l_4	Hebelarm Federmoment
m_R	Rotormasse
m_F	Effektive Flüssigkeitsmasse
m_W	Effektive Masse Wasserring
$m_{\ddot{O}}$	Effektive Masse Öhring
n	Periodenanzahl
r	Ortsvektor (Ortsfestes Koordinatensystem)
r'	Ortsvektor (Rotorfestes Koordinatensystem)
s_W	Abstand Wasserring von der Rotorschwerpunktsebene
$s_{\ddot{O}}$	Abstand Öhring von der Rotorschwerpunktsebene
s	Spaltweite der Dämpfungskammer
t	Zeit
C_d	Dämpfungsmoment
F_L	Resultierende Kraft aus der Flüssigkeitsfüllung
F_W	Resultierende Kraft Wasserring
$F_{\ddot{O}}$	Resultierende Kraft Öhring
H_1	Halbe Höhe Wasserring
H_2	Halbe Höhe Öhring
K_p	Kreiselmoment
L	Länge Rotorschwerpunkt Mitte Kardanzentrum
M_b	Biegemoment
M_L	Resultierendes Moment der Flüssigkeitsfüllung
M_W	Massenwirkung Wasserring
$M_{\ddot{O}}$	Massenwirkung Öhring
Q	Querkraft
R_1	Außenradius Wasserring

R_2	Außenradius Öhring
T_1	Tiefe Wasserring
T_2	Tiefe Öhring
T^d	Schwingungsdauer einer gedämpften Schwingung
$\bar{\alpha}, \bar{\alpha}$	Durchbiegung infolge einer positiven Einheitskraft
$\bar{\beta}, \bar{\beta}$	Neigung infolge einer positiven Einheitskraft = Durchbiegung infolge eines positiven Einheitsmomentes
$\bar{\gamma}, \bar{\gamma}$	Neigung infolge eines positiven Einheitsmomentes
δ	Dämpfungsexponent
η	Frequenzverhältnis
φ	Kippwinkel des Rotors
λ	Komplexe Eigenfrequenz
ν	Kinematische Viskosität
ϑ	Winkel der Motorpendelachse gegenüber der Vertikalen
ρ	Flüssigkeitsdichte
σ	Eigenfrequenz der Ringwelle (Rotorfestes Koordinatensystem)
ω	Eigenfrequenz der Ringwelle (Raumfestes Koordinatensystem)
Ω	Rotordrehzahl
Θ_{pR}	Polares Massenträgheitsmoment Rotor
Θ_{aR}	Äquatoriales (Axiales) Massenträgheitsmoment des Rotors
Θ_{pMP}	Polares Massenträgheitsmoment des Motorpendels
Θ_{aMp}	Äquatoriales (Axiales) Massenträgheitsmoment des Motor - pendels

1. Einführung

Beim Lavalrotor treten Resonanzen bekanntermaßen dann auf, wenn die Frequenz der drehzahlsynchronen Unwuchterregung mit der Biegeeigenfrequenz des Rotors übereinstimmt. Einen breiten Drehzahlbereich instabiler Schwingungen erhält man zusätzlich bei Rotoren, die eine teilweise befüllte Flüssigkeitskammer tragen, wobei die Flüssigkeit ringförmig im Rotor verteilt ist und mit diesem umläuft. Dieser instabile Drehzahlbereich kommt durch die Grundschiwingung der entgegengesetzt zur Rotordrehrichtung umlaufenden Schwerewellen des mitrotierenden Flüssigkeitsringes zustande.

Resonanzen oder instabile Schwingungen während des Betriebs können zur Beschädigung oder gar Zerstörung eines Rotorsystems führen und sind deshalb zu vermeiden. Ein Betrieb jenseits der Biegeresonanz und zugehörigen Instabilität ist - entsprechende konstruktive Einrichtungen zum Passieren der Instabilität vorausgesetzt - grundsätzlich möglich, da alle Rotoren sich selbst zentrieren und die Oberfläche des mitrotierenden Flüssigkeitsringes sich stets symmetrisch zur idealen Drehachse einstellt. Schon in der Konstruktionsphase müssen aber Lage und Breite der Instabilität bzw. die Lage der Resonanz möglichst genau bekannt sein.

Die vorliegende Arbeit untersucht theoretisch und experimentell die Stabilitäts-Grenze und -Reserve eines fliegend gelagerten Rotors mit äußerer Dämpfung, der zwei näherungsweise zylindrische, teilweise befüllte Flüssigkeitsringe trägt. Abbildung 1.1. zeigt eine schematische Darstellung des untersuchten Rotorsystems; wesentliche Teile des Systems sind dazu auf S. 3 stichpunktartig aufgezählt. Der obere Flüssigkeitsring (Wasserring (2)) wird für ein pharmazeutisches Verfahren gefordert und enthält wässrige, also nahezu reibungsfreie Flüssigkeit; er hat durch seine geringe Zähigkeit eine geringe Stabilitätsreserve. Der andere Flüssigkeitsring (Ölring (3)) enthält sehr zähe Flüssigkeit und dient zur inneren Dämpfung des anderen Flüssigkeitsringes. Die innere Dämpfung des ersten Flüssigkeitsringes durch den zweiten ist von der Abstimmung der Eigenfrequenzen beider Flüssigkeitsringe aufeinander, d.h. ihren Fülltiefen abhängig. Das Motorgehäuse des Rotors ist unterhalb seiner Bodenplatte mit einem Kardangelenk (14) am Maschinengestell (15) befestigt. Am Motorgehäuse (13) greift die äußere Dämpfung des Systems an (Dämpfungskammer (8)). Der instabile Bereich wird mit Hilfe eines axial verschiebbaren Fanglagers (4) passiert; dieses erhöht, bzw. erniedrigt je nach Stellung die Steifigkeit der Rotorwelle (9) und damit die Lage des instabilen Bereichs.

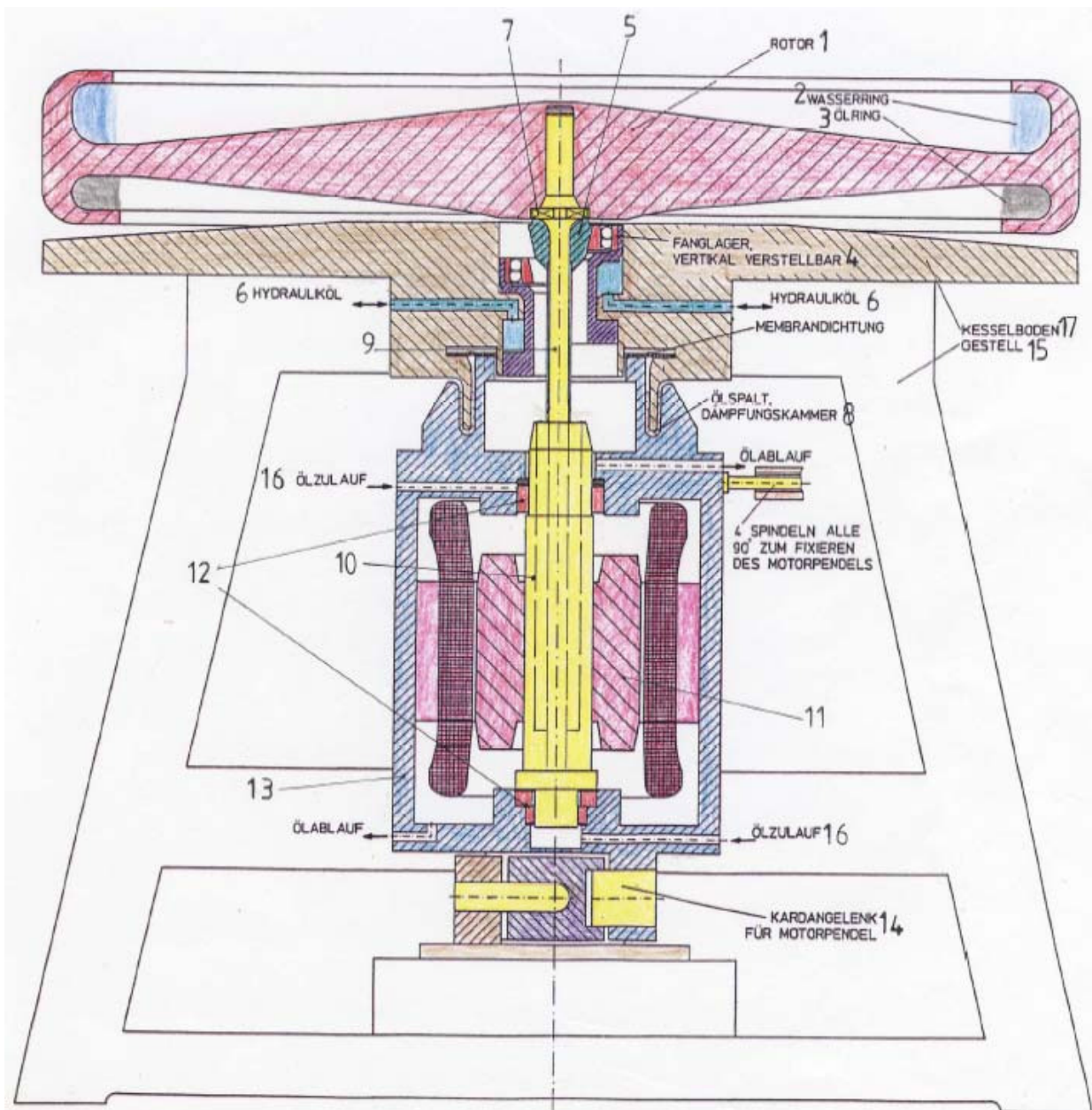


Abbildung1.1.: Untersuchtes Rotorsystem

In Kapitel 2 werden physikalische Grundlagen zu Rotoren, die teilweise mit Flüssigkeit gefüllt sind, anhand bisheriger Literaturergebnisse besprochen und in Kapitel 3 konstruktive Gesichtspunkte des hier betrachteten Rotorsystems herausgestellt. Am Ende dieser beiden Kapitel können dann jeweils die genauen Zielsetzungen für die weiteren Kapitel der Arbeit formuliert werden. Kapitel 4 ist der experimentelle, Kapitel 5 der theoretische Teil der Arbeit. Die Ergebnisse von Messung und Rechnung werden in Kapitel 6 vorgestellt, und Kapitel 7 gibt einen kurzen Ausblick auf zukünftige Arbeit.

Wichtige Teile des behandelten Rotorsystems

- (1) Rotor
- (2) Oberer Flüssigkeitsring aus nahezu reibungsfreier Flüssigkeit (Wasserring), Notwendigkeit eines pharmazeutischen Verfahrens
- (3) Unterer Flüssigkeitsring (Ölring) aus zäher Flüssigkeit zur inneren Dämpfung
- (4) Fanglager zum Durchfahren des instabilen Drehzahlbereiches
- (5) Fanglagerkonus, Verbindungsstück zwischen Welle und Fanglager
- (6) Bohrungen für das Hydrauliköl des Fanglagers
- (7) Mitnehmersverzahnung
- (8) Dämpfungskammer bestehend aus Nut und Zarge
- (9) Rotorwelle, am unteren Ende der Motorwelle eingespannt
- (10) Motorwelle
- (11) Wicklung des Drehstrom Asynchronmotors
- (12) Gleitlager der Motorwelle
- (13) Motorgehäuse
- (14) Kardangelenk
- (15) Maschinengestell
- (16) Bohrungen Gleitlagerschmierung
- (17) Kesselboden

2. Literaturübersicht und Grundlagen

2.1. Rotor symmetrisch zwischen zwei Lagern

Wir wollen in diesem zweiten Kapitel anhand der Literatur die am hier untersuchten Rotor auftretenden Schwingungsphänomene erläutern. Dies sind im einzelnen: Eigenfrequenzen, kritische Drehzahlen, Selbstzentrierung, äußere und innere Dämpfung, Wirkungen der Flüssigkeitsfüllung auf den Rotorschwerpunkt, insbesondere der Ringwelle des innen offenen Flüssigkeitsringes, und Gesamtwirkung der Flüssigkeitsfüllung beim fliegend gelagerten Rotor.

2.1.1. Lavalrotor

Zunächst wollen wir vom Lavalrotor ausgehen und die Phänomene: erzwungene Schwingung, Selbstzentrierung und äußere Dämpfung erläutern. Unter einem Lavalrotor versteht man eine massebehaftete Scheibe, die auf einer biegeelastischen Welle mittig zwischen zwei Lagern befestigt ist; wir beschränken uns auf starre Lagerung des Rotors. Große Teile dieses Kapitels sind dem Buch von R. Gasch [3] entnommen.

2.1.1.1. Lavalrotor ohne Dämpfung

Zuerst wird der Lavalrotor ohne äußere Dämpfung anhand von Abbildung 2.1. betrachtet. Der Schwerpunkt S der massebehafteten Scheibe liegt in der Regel nicht auf der idealen Drehachse, also der Verbindungslinie der beiden Lagermitten, sondern er weist gegenüber dieser eine Exzentrizität e auf. Dreht sich der Rotor mit der Drehzahl Ω , so wird sich der Schwerpunkt fliehkraftbedingt von der idealen Drehachse entfernen, und die Welle wird um den Betrag ρ_w ausgebogen.

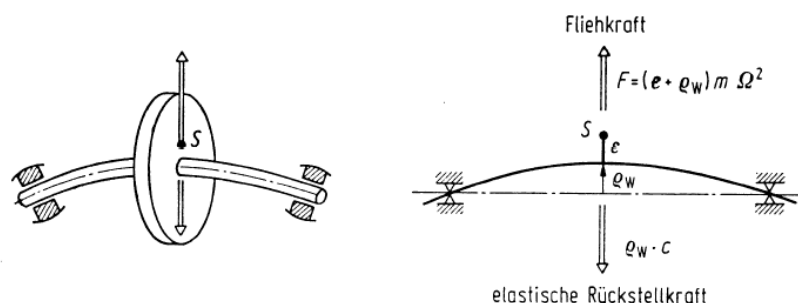


Abbildung 2.1.: Fliehkraftwirkung auf den Lavalrotor

Der Schwerpunkt des Rotors stellt sich bei jeder vom Antrieb vorgegebenen Drehzahl so ein, daß die verlängerte Verbindungslinie von Rotorschwerpunkt und Symmetriemittelpunkt W der Welle (Wellendurchstoßpunkt) durch die ideale Drehachse verläuft; das ist auf die Wirkungsrichtung der Fliehkraft zurückzuführen. Weil sich bei gleichbleibender Wellendrehzahl Ω die gegenseitige Lage von W und S nicht ändert, und die Welle eine Drehbewegung ausführt muß man folgern, daß sich W und S im stationären Betrieb auf Kreisbahnen um die ideale Drehachse bewegen. Man kann sich weiter überlegen und dies durch Experimente qualitativ bestätigen, daß es drei Betriebszustände des Systems aus massebehafteter Scheibe und elastischer Welle gibt. Der erste Bereich umfaßt die Rotordrehzahlen, bei denen die Wellenauslenkung infolge der Fliehkraft gering ist, dies ist der unterkritische Betriebszustand. Im zweiten Bereich, dem um die kritische Drehzahl, wird die Wellenauslenkung sehr groß. Dabei stimmt die Eigenfrequenz der Welle mit der Frequenz der erregenden Unwuchtkraft überein. Im dritten, von Laval entdeckten Bereich überkritischer Drehzahlen geht der Abstand des Rotorschwerpunktes von der Wellenachse gegen Null. Dieser Betriebsbereich wird insbesondere bei Ultrazentrifugen angewendet, um die Lagerkräfte trotz hoher Drehzahl zu begrenzen. Er wird auch für den vorliegenden Rotor mit Flüssigkeitsfüllung verwendet, und zwar vor allem deshalb, weil ein Auswuchten nicht möglich ist. Dieser Sachverhalt wird in Kapitel 3.3. näher erläutert.

Nach der gedanklich - qualitativen Erfassung des Sachverhaltes wollen wir das System mathematisch beschreiben. Eine solche Beschreibung benötigt man für quantitative Aussagen über die Größe von Kräften und Auslenkungen bei der Auslegung eines Rotors.

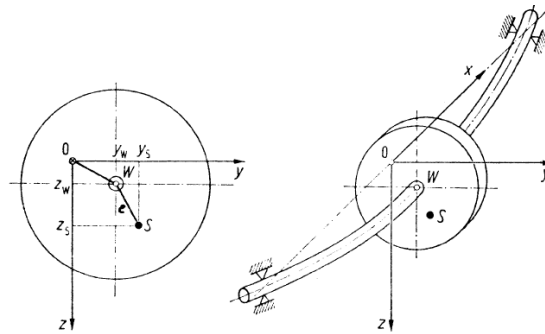


Abbildung 2.2.: Koordinatensystem für den Lavalrotor

Die mathematische Beschreibung geht von einem raumfesten Koordinatensystem aus (Abbildung 2.2), dessen x -Achse mit der idealen Drehachse zusammenfällt. Im ungedämpften Fall erhält man durch Bilden des Kräftegleichgewichtes als Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_S + cz_W &= 0 \\ m\ddot{y}_S + cy_W &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Zwischen der Bewegung des Schwerpunktes und des Wellendurchstoßpunktes besteht der folgende Zusammenhang, den man an Abbildung 2.3. abliest:

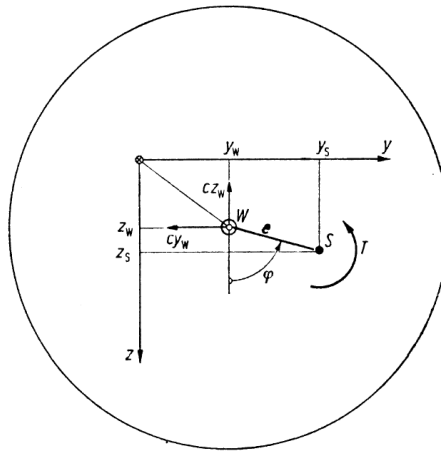


Abbildung 2.3.: Bewegung von Wellendurchstoß - und Schwerpunkt

$$\begin{aligned} y_s &= y_w + e \cdot \sin \varphi \\ z_s &= z_w + e \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Setzt man dies in die Bewegungsgleichung ein, erhält man als Bewegungsgleichung des Wellendurchstoßpunktes:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{y}_w + c \cdot y_w &= me\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \\ m \cdot \ddot{z}_w + c \cdot z_w &= me\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Biegeeigenfrequenz kann durch Lösen des homogenen Teils von (2.3) bestimmt werden. Man erhält bekanntlich $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Dies ist in diesem besonderen Fall gleichzeitig der Wert der kritischen Drehzahl des Rotors. Zur Berechnung der Bahnen des Rotors ziehen wir die rechte Seite der Bewegungsgleichungen heran. Mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$\begin{aligned} y_w &= \hat{y}_w \cdot \sin(\Omega t + \beta) \\ z_w &= \hat{z}_w \cdot \cos(\Omega t + \beta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

erhält man als Lösungen:

$$\hat{z}_w = \hat{y}_w = e \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (2.5)$$

und mit $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$

$$z_w = e \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \cos(\Omega t + \beta) \quad (2.6)$$

$$y_w = e \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \sin(\Omega t + \beta) \quad (2.7)$$

Bildet man $r_w = \sqrt{y_w^2 + z_w^2}$, so sieht man sofort, daß der Wellendurchstoßpunkt auf einer Kreisbahn um die geometrische Drehachse läuft.

Berechnet man noch die Bewegung des Scheibenschwerpunktes, erhält man:

$$z_s = e \frac{1}{1 - \eta^2} \cos(\Omega t + \beta) \quad (2.8)$$

$$y_s = e \frac{1}{1 - \eta^2} \sin(\Omega t + \beta) \quad (2.9)$$

Man erkennt sofort, daß sich auch der Schwerpunkt auf einer Kreisbahn um die geometrische (ideale) Drehachse bewegt. Weiterhin ist:

$$\frac{y_w}{z_w} = \frac{y_s}{z_s} = \tan(\Omega t + \beta), \quad (2.10)$$

was gleichbedeutend damit ist, daß die Punkte 0, W, S auf einer Geraden liegen. Die relative Lage dieser drei Punkte zueinander ist jedoch von der Drehzahl des Rotors abhängig. Im unterkritischen Betrieb ($\Omega < \omega$) beschreibt S eine größere Kreisbahn als W, im überkritischen Betrieb ($\Omega > \omega$) ist es gerade umgekehrt. Der Vektor SW ändert beim Überschreiten der kritischen Drehzahl seine Richtung um 180° . Die Richtungsänderung erfolgt in diesem mathematischen Modell ohne Dämpfung schlagartig. Für $\Omega \gg \omega$ kann man die Selbstzentrierung des Rotors beobachten.

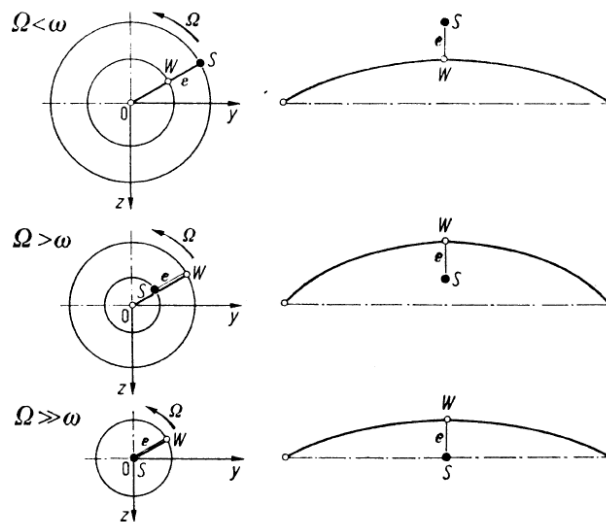


Abbildung 2.4.: Zur Selbstzentrierung des Rotors

2.1.1.2. Lavalrotor mit Dämpfung

Nun betrachten wir die gedämpften Schwingungen des Lavalrotors. Neu eingeführt wird eine Dämpfungskraft, die von der Flüssigkeitsreibung in geeigneten Dämpferelementen herrührt. Man spricht von äußerer Dämpfung, wenn die Dämpfungskraft vom ruhenden System (Gehäuse, Lagerschalen usw.) auf Welle oder Rotor übertragen wird. Innere Dämpfung entsteht, wenn z.B. die Welle aus viskoelastischem Material gefertigt ist, in unserem Rotorsystem durch die Viskosität der eingefüllten Flüssigkeit.

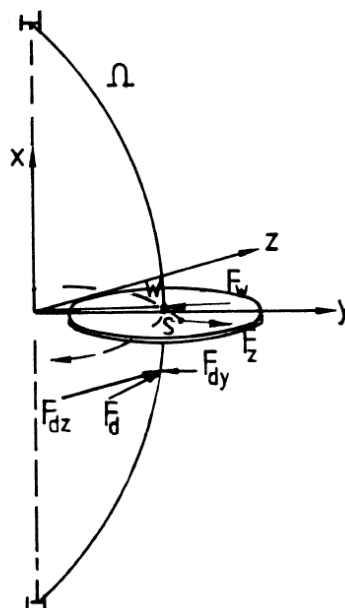


Abbildung 2.5.: Wirkungsrichtung der Dämpfungskraft

Bei einem mit der Drehzahl Ω rotierenden Lavalrotor mit äußerer Dämpfung, der aus der idealen Drehachse ausgelenkt ist, treten folgende Kräfte auf: die im Rotorschwerpunkt angreifende Zentrifugalkraft F_Z der um die ideale Drehachse rotierenden Rotormasse; die im Wellendurchstoßpunkt der Rotors angreifende elastische Rückstellkraft der Welle F_W ; und schließlich die Dämpferkraft F_d (hier mit den Komponenten F_{dy} und F_{dz}), die über die Lager am Symmetriemittelpunkt der Welle mit der in Abbildung 2.5. eingetragenen Wirkungsrichtung angreift. Durch das Zusammenspiel von Zentrifugalkraft und elastischer Kraft der Welle mit der Dämpferkraft wird der Vektor \vec{OS} gegenüber dem Vektor \vec{OW} phasenverschoben. Die Phasenverschiebung ist umso größer je größer die Dämpferkraft im Verhältnis zu den beiden anderen Kräften ist. Sie bewegt sich zwischen 0° ($\Omega=0$) und 180° ($\Omega \rightarrow \infty$). Die Dämpfung ändert nichts an der Bewegung von W und S auf Kreisbahnen. Sie verändert nur *drehzahlabhängig* die Lage der beiden Punkte zueinander: der Übergang zur Selbstzentrierung erfolgt in diesem Modell nicht schlagartig wie beim ungedämpften Lavalrotor, sondern kontinuierlich. Je größer die Dämpfungskraft ist, desto besser ist der Rotor beim Resonanzdurchgang vor unzulässig großen Amplituden geschützt, denn die Dämpfungskraft überlagert der zentrifugalen Kraft eine tangentiale, die den Rotor auf seiner Bahn hält.

Es folgt die quantitative Erfassung des gedämpften Lavalrotors. Mit dem Proportionalitätsfaktor k_a für eine äußere geschwindigkeitsproportionale Dämpfung lauten die Bewegungsgleichungen des Lavalrotors für den gedämpften Fall:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{z}_w + k_a \cdot \dot{z}_w + c \cdot z_w &= m e \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \\ m \cdot \ddot{y}_w + k_a \cdot \dot{y}_w + c \cdot y_w &= m e \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Unter Verwendung komplexer Koordinaten $r_w = z_w + j \cdot y_w$ kann man beide Gleichungen zusammenfassen:

$$\ddot{r}_w + \frac{k_a}{m} \dot{r}_w + \omega^2 r_w = e \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta)} \quad (2.12)$$

mit $\omega^2 = \frac{c}{m}$

Die homogene Lösung der Bewegungsgleichung ergibt mit dem Ansatz $r_w(t) = e^{\lambda t}$ ein charakteristisches Polynom und dieses die komplexen Eigenfrequenzen:

$$\lambda_{1/2} = \delta_{1/2} + j \omega_{1/2} = -\frac{1}{2} \frac{k_a}{m} \pm j \omega \sqrt{1 - \left(\frac{k_a}{m}\right)^2} \quad (2.13)$$

Die partikuläre Lösung, welche man wieder durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite findet, ergibt nach einigen kurzen Zwischenrechnungen:

$$r_w = \varepsilon \frac{\eta^2((1-\eta^2) - j \cdot 2D_a)}{(1-\eta^2) + 4D_a^2 \eta^2} e^{j(\Omega t + \beta)}, \quad (2.14)$$

wobei $D_a = \frac{k_a}{2m\omega}$ ist.

Der Wellendurchstoßpunkt bewegt sich also wieder auf einer Kreisbahn. Sie hat den Radius

$$|r_w| = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2) + 4D_a^2 \eta^2}} e \quad (2.15)$$

Analoges läßt sich über die Bewegung des Schwerpunktes aussagen. Seine Bahn hat die Größe

$$r_s = r_w + e e^{j(\Omega t + \beta)} \quad (2.16)$$

An (2.14) kann man in Verbindung mit Abbildung 2.6. weiterhin ablesen, daß die Punkte 0, W, und S nicht mehr auf einer Geraden liegen.

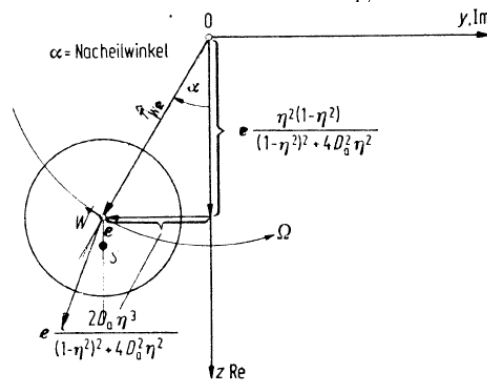


Abbildung 2.6.: Zur Lage von Schwer - und Wellendurchstoßpunkt beim Lavalrotor mit äußerer Dämpfung

Der Phasenwinkel zwischen \overrightarrow{OW} und \overrightarrow{WS} berechnet sich zu:

$$\tan \alpha = \frac{2D_a \eta}{1-\eta^2} \quad (2.17)$$

Auch beim Lavalrotor mit äußerer Dämpfung hängt die Richtung des Zeigers \overrightarrow{SW} also davon ab, ob der Rotor im unter - oder überkritischen Drehzahlbereich betrieben wird. Für

$\Omega = 0$ ist α ebenfalls 0, für $\Omega \rightarrow \infty$ ist $\alpha = 180^\circ$. Der Übergang erfolgt dabei im Gegensatz zum ungedämpften Fall stetig, wie Abbildung 2.7. verdeutlicht.

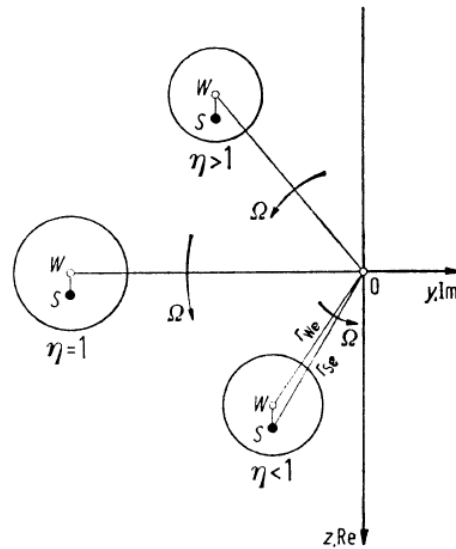


Abbildung 2.7.: Stetiger Übergang des Winkels des Vektors WS

In Abbildung 2.8. ist die bezogene Wellenauslenkung und der Nacheilwinkel α als Funktion von η mit D_a als Parameter aufgetragen

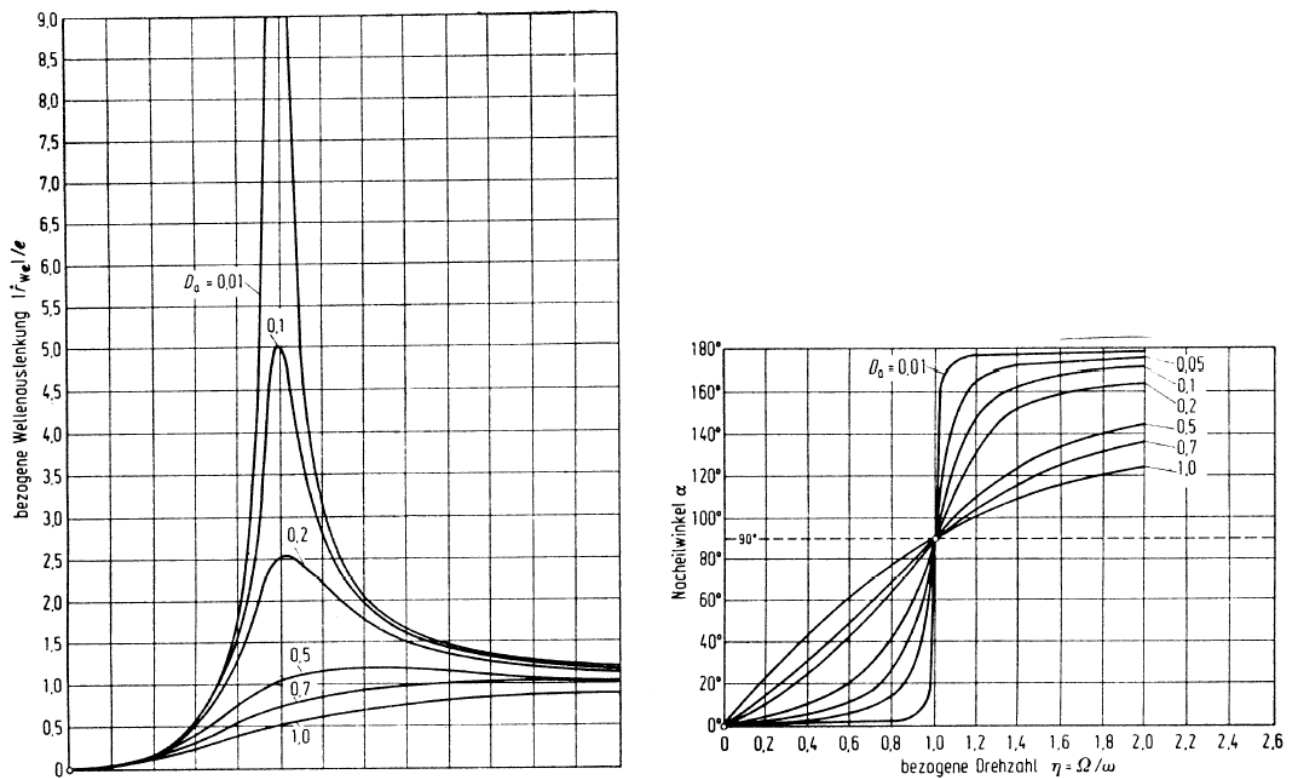


Abbildung 2.8.: Bezogene Wellenauslenkung und Phasenwinkel als Funktion von D_a und η

2.1.2. Der Flüssigkeitsring als Punktmasse

Nun wollen wir uns einem teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Rotor zuwenden und den Einfluß eines mitrotierenden Wasserrings auf die kritische Drehzahl ins Auge fassen. *E. Schmidt* [14] formuliert in seiner Arbeit zum Einfluß einer Flüssigkeitsfüllung auf die Rotorbewegung die wesentliche Erfahrung: wird ein flüssigkeitsgefüllter Rotor aus seiner (idealen) geometrischen Drehachse ausgelenkt, so bildet die Flüssigkeitsoberfläche einen Zylinder, dessen Achse in der idealen Drehachse bleibt, vergleiche dazu Abbildung 2.9..

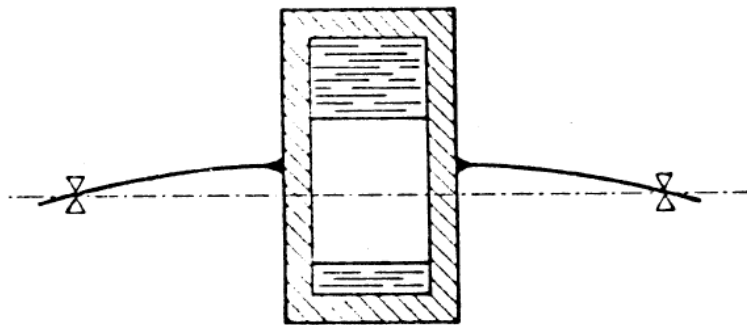


Abbildung 2.9.: Konzentrische Einstellung der Oberfläche des mitrotierenden Flüssigkeitsringes nach Schmidt [14]

Daraus folgert er, daß man die kritische Drehzahl der Anordnung nicht einfach dadurch gewinnen kann, daß man die eingefüllte Flüssigkeitsmasse zur Rotormasse hinzuaddiert, weil die Massenverteilung der Flüssigkeit im ausgelenkten Zustand nicht mehr symmetrisch zur Drehachse des Rotors ist. Wenn man sich den verbleibenden Hohlraum mit Flüssigkeit erfüllt denkt, bleibt die Symmetrie erhalten. Daraus schließt er, daß die kritische Drehzahl der Anordnung einfach dadurch zu gewinnen ist, daß man sich den ganzen Hohlraum mit Flüssigkeit erfüllt denkt und diese virtuelle Flüssigkeitsmasse zur Rotormasse addiert. Das ist richtig, solange die Einstellung der Flüssigkeitsoberfläche nach Abbildung 2.9. tatsächlich schnell genug geschieht. Die Flüssigkeitsmasse m_F , die den ganzen Hohlraum erfüllen würde, ist zu der Läufermasse m_R zu addieren. Damit ergibt sich die kritische Drehzahl:

$$\omega_{krit} = \sqrt{\frac{c}{m_F + m_R}} \quad (2.18)$$

Bei der Berechnung der kritischen Drehzahl wird die Flüssigkeit also als Punktmasse aufgefaßt. Außerdem berechnete Schmidt mit Hilfe der Potentialtheorie näherungsweise die Frequenzen der freien Schwingungen des umlaufenden Flüssigkeitsrings. Zu einer un- wucherregenden Massenverschiebung kann lediglich die Grundschiwingung der Ringwelle

führen; das zeigt er anhand der untenstehenden Abbildung, die seiner Arbeit entnommen ist. Denn bei allen Oberschwingungen heben sich die auf den Rotorschwerpunkt wirkenden Unwuchten der Flüssigkeit auf.

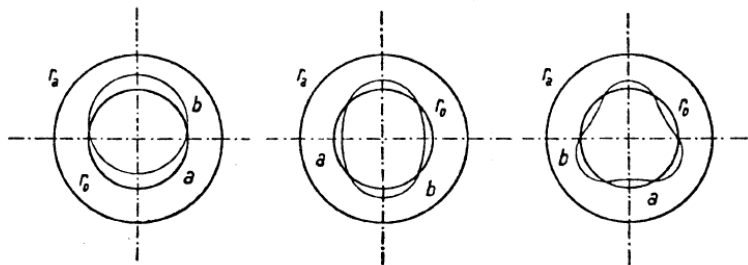
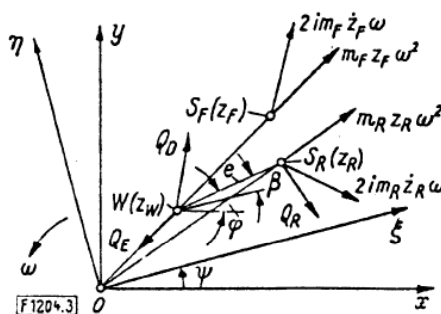


Abbildung 2.10.: Grundschiwingung, erste und zweite Oberschwingung der Ringwelle

Er findet Eigenfrequenzen des mitumlaufenden Wasserringes, die kleiner sind als die Winkelgeschwindigkeit der Rotordrehung. Demnach gehören die gefundenen Eigenfrequenzen zu Ringwellen, die entgegengesetzt zur Rotordrehrichtung umlaufen.

Experimentell und rechnerisch untersuchte *F.G.Kollmann* [10] die kritischen Drehzahlen flüssigkeitsgefüllter Hohlkörper. Bei seiner *Berechnung* der kritischen Drehzahlen geht er für den Flüssigkeitsring ebenfalls von dem Modell einer Punktmasse aus. Auch er gibt die kritische Drehzahl so an, als sei der ganze Läufer mit Flüssigkeit gefüllt. Weil die kritische Drehzahl des teilweise gefüllten Rotors kleiner ist, als die des ungefüllten, spricht er von der *erniedrigten* kritischen Drehzahl.

Abbildung 2.11. zeigt das für die Bewegungsgleichungen maßgebliche Koordinatensystem mit mit den zugehörigen Termen.



Kraft	Formel Ausdruck
elastische Rückstellkraft der Welle	$Q_E = -z_W/a$
Scheibenreibungskraft	$Q_R = -i \times m_R z_R \omega^2$
Dämpfungskraft	$Q_D = -2 m_R d \dot{z}_W$
Zentrifugalkraft des Läufers	$m_R z_R \omega^2$
Corioliskraft des Läufers	$2 i m_R \dot{z}_R \omega$
Zentrifugalkraft der Flüssigkeit	$m_F z_F \omega^2$
Corioliskraft der Flüssigkeit	$2 i m_F \dot{z}_F \omega$

Abbildung 2.11.: Koordinatensystem und angesetzte Kräfte

Kollmann bestätigt die Richtigkeit, die kritische Drehzahl des flüssigkeitsgefüllten Rotors auf die beschriebene Art zu bestimmen, im *experimentellen Teil* seiner Arbeit. Gemessene und berechnete kritische Drehzahlen stimmen gut überein. Oberhalb der kritischen Drehzahlen stellte er in seinen Experimenten einen durch seine Rechnungen nicht vorhersagba-

ren, breiten instabilen Drehzahlbereich fest. Dessen Grenzen konnte er nicht berechnen, da er die Flüssigkeit als mit dem Rotor umlaufende Punktmasse idealisierte. Er vermutete, daß die zusätzlichen instabilen Schwingungen durch Wellenerscheinungen an der freien Oberfläche des Flüssigkeitsringes entstehen, was er durch das Einbringen von Trennstegen in den hohlen Läufer zeigen konnte. Denn jene Stege verhinderten durch die Art ihrer Anbringung gerade das Ausbreiten solcher freier Oberflächenwellen. Die Betrachtung wird damit auf die Berechnung der freien Wellen an der Oberfläche des Flüssigkeitsringes gelenkt.

2.1.3. Wellenbewegung an der freien Flüssigkeitsoberfläche

2.1.3.1. Rotor ohne äußere Dämpfung

Unter den Arbeiten, welche sich mit den Oberflächenwellen im Lavalrotor befassen sei hier zunächst die experimentell - theoretische von *Wolf* [19] erwähnt, in der ein Rotor ohne äußere Dämpfung mittig zwischen zwei Lagern behandelt wird. In der Rechnung geht Wolf von reibungsfreier und inkompressibler Flüssigkeit aus. Die Bewegung der Flüssigkeit wird als zweidimensional betrachtet, d.h. es wird angenommen, die Wellenbewegung sei unabhängig von der axialen Geschwindigkeitskomponente. Die Flüssigkeitsbewegung wird durch die Kontinuitätsbedingung und die Bewegungsgleichungen in einem rotorfesten Koordinatensystem beschrieben. Kreiseinflüsse und Schwerkraft werden vernachlässigt. Er löst das Differentialgleichungssystem durch Linearisierung für die gesuchten Größen. Diese sind die Strömungsgeschwindigkeiten in radialer - und Umfangsrichtung und der Flüssigkeitsdruck. Durch Integration des Flüssigkeitsdruckes über den Umfang kann er eine rein radiale Kraft angeben, die eine reibungsfreie Flüssigkeit auf den Rotor ausübt. Diese ist:

$$F_L = m_F \omega^2 r \left(\frac{\sigma^2 - 2\sigma\Omega - \Omega^2}{\gamma\sigma^2 - 2\sigma\Omega - \Omega^2} \right) = m_F \omega^2 r \frac{(\sigma/\Omega)^2 - 2\sigma/\Omega - 1}{\gamma(\sigma/\Omega)^2 - 2\sigma/\Omega - 1}, \quad (2.19)$$

wobei $\sigma = \omega - \Omega$ ist und γ eine vom Füllgrad abhängige Größe bezeichnet. Es ist Ω die Drehfrequenz des Rotors, σ die Eigenfrequenz der umlaufenden Welle im rotorfesten Koordinatensystem und ω die Eigenfrequenz der umlaufenden Welle im ruhenden Koordinatensystem. Der Biegeeigenfrequenz des Lavalrotors wird also die Eigenfrequenz der umlaufenden Flüssigkeitswelle hinzugefügt. Unter m_F ist die effektive Flüssigkeitsmasse zu verstehen, mit der schon Schmidt und Kollmann gearbeitet haben. Sie ist nun auch in dem Wolf'schen Ansatz das Maß, mit dem die "Frequenzfunktion", die nur das Verhältnis σ/Ω enthält, in die resultierende Kraft eingeht.

Für Stabilitätsaussagen bildet Wolf Kräftegleichgewicht mit der elastischen Kraft der Welle und der Massenkraft. Dieses ergibt:

$$kr - m_R \omega^2 r = m_F \omega^2 r \left(\frac{\sigma^2 - 2\sigma\Omega - \Omega^2}{\gamma\sigma^2 - 2\sigma\Omega - \Omega^2} \right) \quad (2.20)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich die instabilen Drehzahlbereiche für synchrone und asynchrone sowie gleichläufige und gegenläufige Unwuchterregung durch die Flüssigkeit diskutieren. Für zur Rotordrehzahl synchrone Unwuchterregung durch die Flüssigkeit ($\sigma = \omega - \Omega = 0$) erhält man als Lösung eine kritische Drehzahl, welche mit der von Kollmann berechneten und gemessenen übereinstimmt. Die Aussagen von Wolf über den instabilen Drehzahlbereich zeigt Abbildung 2.12.. Dort ist auch der Vergleich seiner Meß- und Rechenergebnisse aufgezeigt.

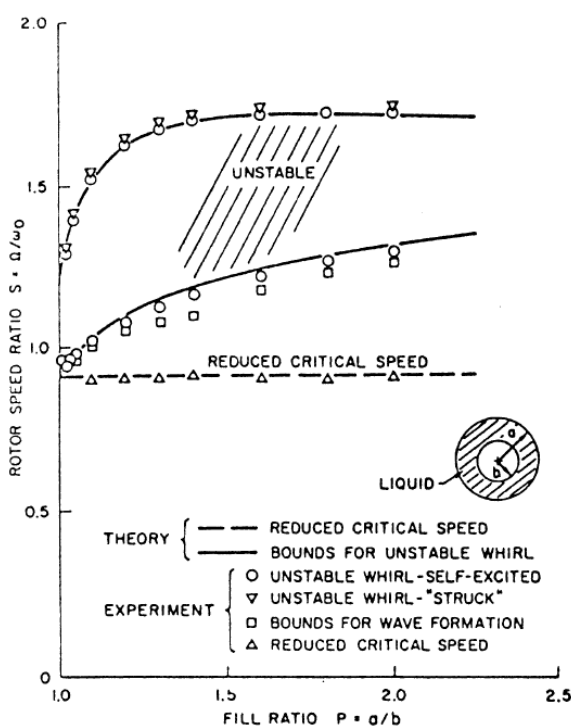


Fig. 5 Stability diagram for test rotor filled with klearol mineral oil ($\mu = 0.206$)

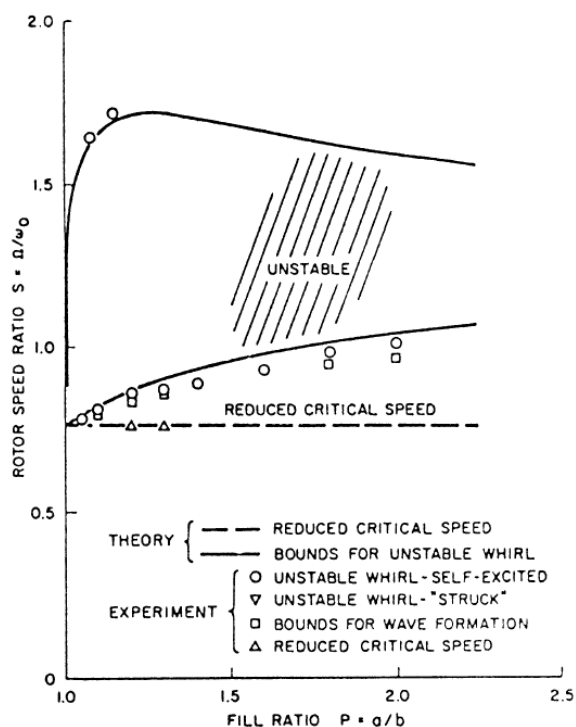


Fig. 7 Stability diagram for test rotor filled with acetylene tetrabromide ($\mu = 0.735$)

Abbildung 2.12.: Grenzen des Instabilen Drehzahlbereiches in Abhängigkeit des Füllgrades für zwei Flüssigkeiten verschiedener Zähigkeit und Dichte

Sowohl im unter- wie auch im überkritischen Drehzahlbereich wird sich die Flüssigkeit im Rotor so ausrichten, daß ihre freie Oberfläche einen zur geometrischen Drehachse symmetrischen Zylinder bildet, das stimmt mit dem von Schmidt formulierten Erfahrungsprinzip überein. Vom Rotor selbst wissen wir, daß er sich im überkritischen Bereich auf die ideale Dreh-

achse einstellt. Der Wellendurchstoßpunkt hat dabei als maximalen Abstand von der idealen Drehachse die Exzentrizität des Rotorschwerpunktes. Daraus darf man folgern, daß sowohl die Auslenkung wie auch die Lagerkräfte im überkritischen Fall endliche Werte annehmen. Ein überkritischer Betrieb ist also auch mit Flüssigkeitsfüllung grundsätzlich möglich.

2.1.3.2. Rotor mit äußerer Dämpfung

Hendricks und *Morton* [6] knüpfen in ihrer Arbeit inhaltlich an die von *Wolf* an und erweitern dessen Modell um äußere und innere Dämpfung. Dabei stellen sie fest: führt man eine Kraft aus äußerer Dämpfung in das Rechenmodell für den flüssigkeitsgefüllten Rotor von *Wolf* ein, so gibt es keine Rotordrehzahlen, für die das System stabil ist. Denn ein Dämpfer übt eine Kraft auf die Flüssigkeit aus, die nicht in Phase ist mit der Beschleunigung und Auslenkung des Rotors. Eine reibungsfreie Flüssigkeit hat keinen Mechanismus, diese Kraft auszugleichen. Um ein brauchbares Rechenmodell zu haben, muß die Zähigkeit der Flüssigkeit im Rotor mitberücksichtigt werden. Sie entwickeln eine Theorie für den mit Flüssigkeit geringer Zähigkeit gefüllten Rotor, bei gleichzeitiger äußerer Dämpfung. Dabei verwenden sie zur Beschreibung der Flüssigkeitsbewegung die linearisierten Navier - Stokesgleichungen in rotorfesten Koordinaten. Die Flüssigkeit wird auch hier als inkompressibel betrachtet. Die Zähigkeit wird durch eine Grenzschichtrechnung an der senkrechten Behälterwand berücksichtigt. Die Grenzschichten an Boden und Deckel des Rotors, die sogenannten Ekman - Schichten werden vernachlässigt. Kreiseinflüsse und Schwerkraft werden für den Rotor, der mittig zwischen zwei Lagern geführt sein soll, nicht berücksichtigt. Im Gegensatz zu *Wolf* berechnen sie nicht eine resultierende Kraft auf den Rotor, sondern führen komplexe Eigenwertberechnungen durch. Ein wichtiges Ergebnis der Arbeit kann man mit Abbildung 2.13. folgendermaßen erläutern:

Ein Rotor ohne äußere Dämpfung, der mit quasi reibungsfreier Flüssigkeit gefüllt ist, läuft immer in - oder grenzstabil. Kommt äußere Dämpfung hinzu, so gibt es keine grenzstabile Drehzahl. Stabile Drehzahlen entstehen erst, wenn bei äußerer Dämpfung zusätzlich eine viskose Flüssigkeitsfüllung verwendet wird. Dann gibt es einen breiten instabilen Drehzahlbereich in der Umgebung der kritischen Drehzahl des leeren Rotors und stabiles Verhalten unter - und oberhalb dieses instabilen Bereichs.

Die Gültigkeit der Rechnung von *Hendricks* und *Morton* wird dadurch eingeschränkt, daß die Ekman - Grenzschichten an Boden und Deckel vernachlässigt wurden. Diese können, wie die Autoren feststellen, bei geringer Rotorhöhe und einer größeren Flüssigkeitstiefe im rotierenden Ring durchaus eine Rolle spielen.

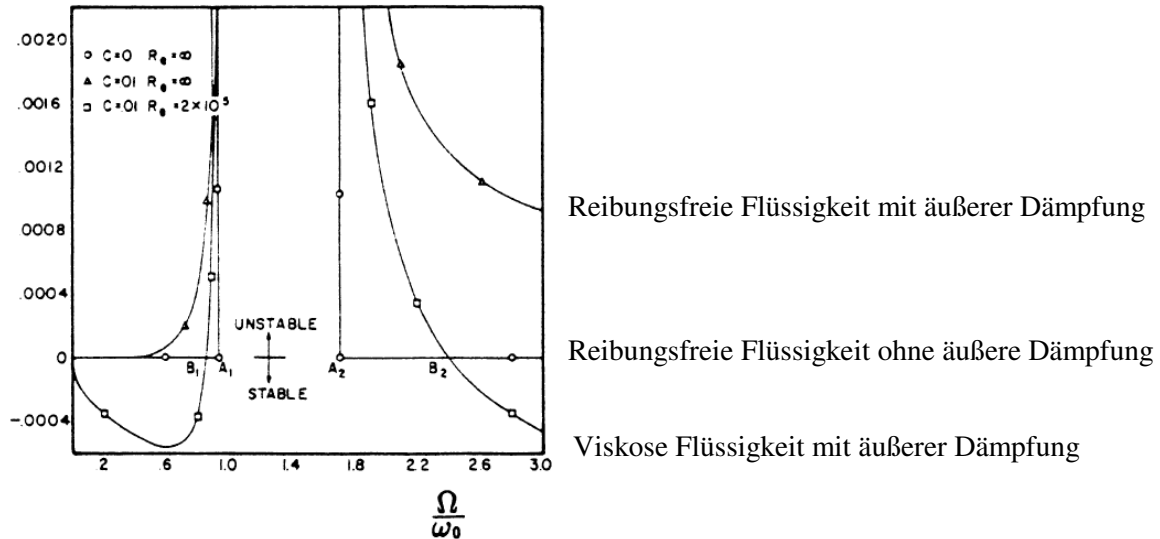


Abbildung 2.13.: Stabilitätsgrenzen des Rotors ohne und mit äußerer Dämpfung, mit reibungsfreier und zäher Flüssigkeitsfüllung

2.2. Flüssigkeitsgefüllter, fliegend gelagerter Rotor

Bisher war ausschließlich von einem Rotor mittig zwischen zwei Lagern die Rede. Nun wollen wir zur vollständigen Beschreibung des in dieser Arbeit betrachteten Rotors die Voraussetzung fallenlassen, daß der Rotor sich mittig zwischen zwei Lagern befindet. Kreiseffekte müssen somit berücksichtigt werden. Wir beschreiben in Kapitel 2.2.1. einige Kreiselphänomene, in Kapitel 2.2.2. die Berechnung der Eigenfrequenzen des fliegend gelagerten Rotors ohne Flüssigkeitsfüllung, und in Kapitel 2.2.3. geben wir einen kurzen Überblick zur Arbeit von *G. Lichtenberg* über den fliegend gelagerten Rotor mit Flüssigkeitsfüllung.

2.2.1. Kreiselphänomene

Wir betrachten in enger Anlehnung an Grammel [4] zunächst die *reguläre Präzession* eines symmetrischen, kräftefreien Kreisels, der unter seinem Schwerpunkt gestützt ist. Diese Bewegung des Kreisels kann man anhand von Bild 2.14. so beschreiben: der Kegel läuft mit einer Eigendrehgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ um seine Figurenachse um. Die Figurenachse selbst dreht sich um die Achse des mit \vec{D} bezeichneten Gesamtdrehimpulses und beschreibt wegen ihrer Schrägstellung die Mantelfläche eines Kegels, den sogenannten Prä-

zessionskegel. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Figurenachse um die Achse des Drehimpulses bewegt heißt Präzessionsgeschwindigkeit $\vec{\omega}_p$. Der Winkel zwischen der Drehimpulsachse und der Figurenachse ist der Winkel der Präzession δ . Die reguläre Präzession ist die natürliche Bewegung eines kräftefreien Kreisel. Zwei der Größen $\vec{\Omega}$, $\vec{\omega}_p$ und δ legen dabei die dritte fest. Will man beispielsweise die Eigendrehgeschwindigkeit eines Kreisel steigern, ohne dabei seine natürliche Bewegung zu verletzen muß entweder der Winkel der Präzession verkleinert, oder die Präzessionsgeschwindigkeit vergrößert werden. Abbildung 2.14. zeigt die reguläre Präzession eines a) gestreckten und eines b) abgeplatteten Kreisel.

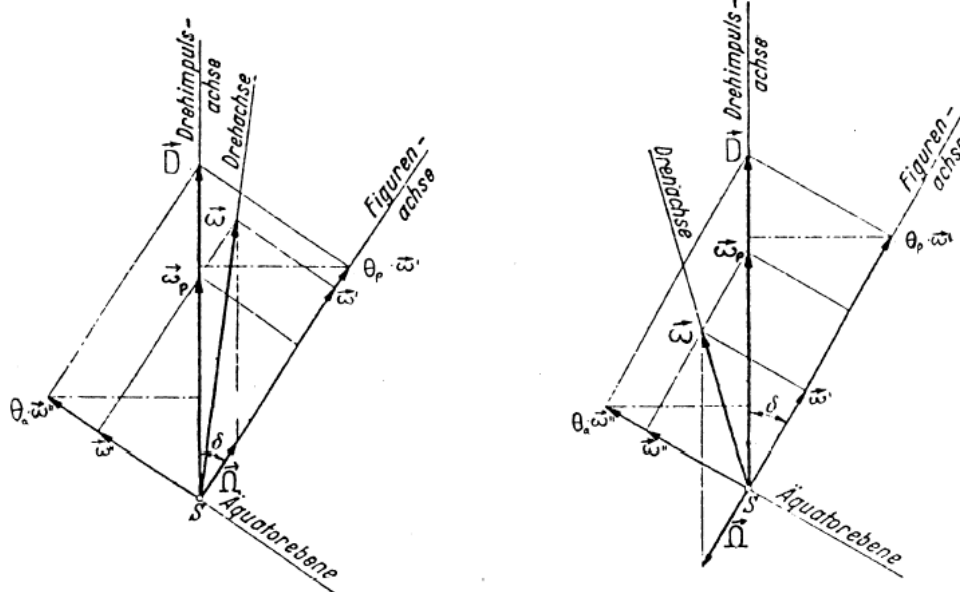


Abbildung 2.14.: a) Reguläre Präzession des gestreckten Kreisel.

b) Reguläre Präzession des abgeplatteten Kreisel.

Wird der Winkel einer natürlichen Präzession willkürlich durch den Zwang eines äußeren Momentes M_p verändert, spricht man von *regulärer erzwungener Präzession*. Grammel [4] beschreibt die Wirkung des äußeren Moments M_p : "Das Moment M_p hat, sofern sein Betrag positiv ist, das Bestreben, den Winkel der Präzession zu vergrößern. Das scheinbar unnatürliche besteht nun darin, daß der Kreisel diesem Drange nicht einfach nachgibt, wie er das im Ruhezustand täte, sondern senkrecht dazu ausweicht." Der Kreisel antwortet auf ein äußeres Moment mit einem Kreiselmoment K_p , das dem äußeren Moment entgegenwirkt. Grammel "Dieses Kreiselmoment ist es, welches man als die eigentümliche Störrigkeit des laufenden Kreisel fühlt, wenn man ihn willkürlich bewegt, d.h. seine Figurenachse in eine andere Achse zu schwenken versucht." Das Kreiselmoment ist umso größer, je größer die Eigendrehgeschwindigkeit des Kreisel ist.

Für den Drehsinn von K_p gilt der Satz vom gleichsinnigen Parallelismus der Drehachsen: "Das Kreiselmoment K_p sucht, soweit sein Betrag positiv ist, die Figurenachse mit der

Achse der Präzessionsachse, d.h. den Vektor der Eigendrehung mit dem Vektor der Zwangsdrehung auf dem kürzesten Wege gleichstimmig zur Deckung zu bringen." [4]

Das bisher Gewonnene wenden wir nun auf eine Kreisscheibe an, die auf einer einseitig eingespannten biegeelastischen Welle sitzt. Die Welle wird durch die anregenden Unwuchtkräfte der Scheibe ausgebogen. Bei einer einseitigen Einspannung wird dabei die Figurenachse der Kreisscheibe willkürlich schräggestellt, der Winkel der Präzession vergrößert und die Bewegung gehört in der Regel nicht zu den natürlichen Bewegungen des Kreisels. Wir folgern, daß ein Moment, das wir mit K_p' (Kreiselmoment im engeren Sinne) bezeichnen wollen, in der in Abbildung 2.15. angegebenen Richtung wirkt. Gleichzeitig wird die Scheibe in jedem Augenblick auf der Kreisbahn um äquatoriale Achsen in der Scheibenebene beschleunigt. Das verursacht ein weiteres Moment M_T , das in der Massenträgheit der Scheibe begründet liegt. Das Kreiselmoment hat also zwei Komponenten. In Experimenten treten diese beiden Momente natürlich nur zusammen auf. Die Existenz von K_p' zusätzlich zu M_T kann man durch einen Versuch mit und ohne Drehung der Scheibe um ihre Figurenachse belegen. In Abbildung 2.15. sind M_T und K_p' in Komponentenzerlegungen als Reaktionsmomente auf die Welle dargestellt. Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß die an der Anschauung gewonnen Momente mit den entsprechenden Momententermen der folgenden Rechnung nach Art und Richtung unmittelbar verglichen werden können.

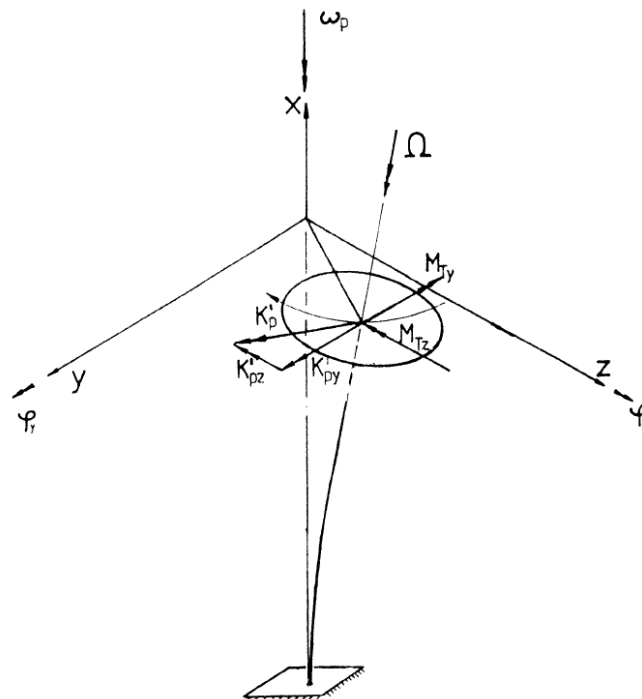


Abbildung 2.15.: Wirkungsrichtung der Komponenten des Kreiselmomentes

Welche Eigenschaften fügt ein Kreisel den Eigenschaften eines Rotors mittig zwischen zwei Lagern hinzu, oder welche er beeinflusst er? Erstens wird sich die beschriebene Stör-
 rigkeit des Kreisels drehzahlabhängig auf die Biegeeigenfrequenz des Systems Rotor/Welle
 auswirken. Ein Kreisel wehrt sich um so mehr gegen eine Änderung seiner augenblickli-
 chen Drehachse, je schneller er sich um seine Achse dreht. Das nimmt sich wie eine Ände-
 rung der Steifigkeit der Welle aus. Zweitens müssen wir eine neue Eigenfrequenz feststel-
 len. Als solche hat man die Präzessionsbewegung des Kreisels anzusehen.

Außerdem muß die Nutationsbewegung des Kreisels erwähnt werden. Sie entsteht, wenn
 man einen in Bewegung befindlichen Kreisel mit einem Kraftstoß versieht. Der Kreisel
 führt hierauf Nick - und Taumelbewegungen kleiner Amplitude aus. Die Amplituden sind
 umso kleiner je größer die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ist. Die Eigenfrequenz der
 Nutation ist hoch und kann der Präzession überlagert sein. (Abbildung 2.16.)

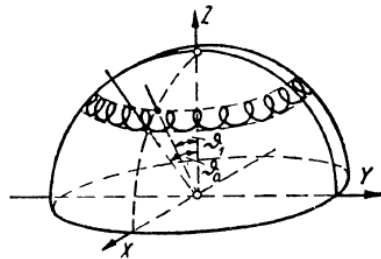


Abbildung 2.16.: Überlagerung der regulären Präzession durch die Nutation beim
 schweren symmetrischen Kreisel (geringe Drehzahl)

2.2.2. Eigenfrequenzen und kritische Drehzahlen eines Rotorkreisels

2.2.2.1. Eigenfrequenzen

Von Gasch [3] wird eine Möglichkeit zur Herleitung der Werte der Eigenfrequenzen beim
 fliegend gelagerten Rotor beschrieben. Zunächst werden zwei Koordinatensysteme x, y, z
 bzw. x', y', z' wie in Abbildung 2.17. festgelegt.

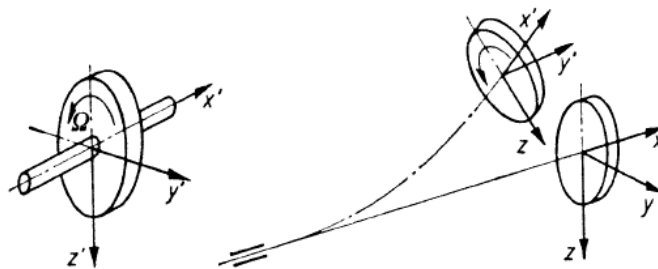


Abbildung 2.17.: Koordinatensysteme für die Berechnung des Kreiselmoments [3]

Das Koordinatensystem x, y, z ist raumfest; seine x - Achse liegt in der idealen Drehachse. Die x' - Achse des Koordinatensystems x', y', z' liegt im Symmetriemittelpunkt der Rotorwelle. Das Koordinatensystem mit den gestrichenen Achsen macht alle Bewegungen der Rotorscheibe mit der Einschränkung mit, daß es keine Rotation um die x' - Achse ausführt. Bezüglich des Koordinatensystems x', y', z' lauten die Drallkomponenten:[3]

$$\begin{aligned} L_{x'} &= \Theta_p \dot{\varphi}_{Sx} \\ L_{y'} &= \Theta_p \dot{\varphi}_{Sy} \\ L_{z'} &= \Theta_p \dot{\varphi}_{Sz} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mit Θ_p ist das polare Massenträgheitsmoment, mit φ_{si} die Geschwindigkeiten um die Hauptträgheitsachsen des Rotorkreisels bezeichnet. Bei der Transformation der Drallkomponenten aus den rotorfesten in ortsfeste Komponenten setzen wir die Drallkomponenten mit Hilfe von Abbildung 2.18. zusammen:

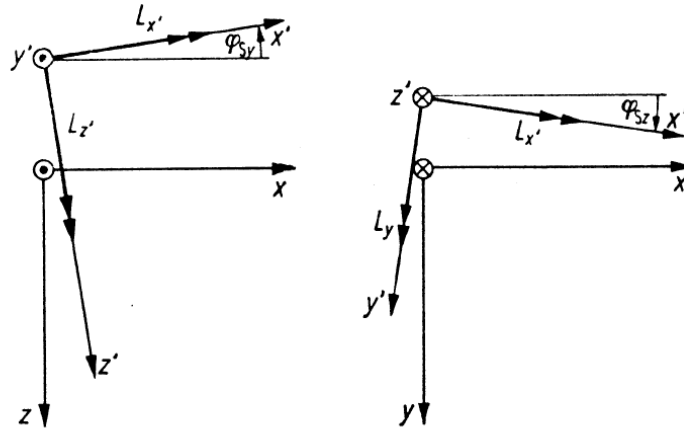


Abbildung 2.18.: Zur Transformation der Komponenten des Drehimpulses des Kreisels aus einem ortsfesten in ein raumfestes Koordinatensystem [3]

$$\begin{aligned} L_y &= L_{y'} + L_{x'} \varphi_{Sz} \\ L_z &= L_{z'} - L_{x'} \varphi_{Sy} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Setzt man die Drallkomponenten des mitbewegten Koordinatensystems in die des ortsfesten ein und führt dabei gleichzeitig eine Differentiation nach der Zeit aus ($\frac{dL}{dt} = M$), so erhält man mit $\dot{\varphi}_{Sx} = -\Omega$:

$$\begin{aligned}
M_y = L_y &= \Theta_a \ddot{\varphi}_{Sy} - \Omega \Theta_p \dot{\varphi}_{Sz} \\
M_z = L_z &= \Theta_a \ddot{\varphi}_{Sz} + \Omega \Theta_p \dot{\varphi}_{Sy}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Mit diesen Momenten kann man die Bewegungsgleichungen, die die Bewegung einer rotierenden Scheibe unter Berücksichtigung des Kreiseinflusses beschreiben, angeben. Dabei haben wir die Einführung der Steifigkeitszahlen aus Platzgründen weggelassen. [3]

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_a \\ & m & 0 \\ & 0 & \Theta_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_S \\ \ddot{\varphi}_{Sy} \\ \ddot{y}_S \\ \ddot{\varphi}_{Sz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & 0 & -\Omega \Theta_p \\ 0 & 0 \\ 0 & +\Omega \Theta_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_S \\ \dot{\varphi}_{Sy} \\ \dot{y}_S \\ \dot{\varphi}_{Sz} \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \\ & c_{11} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_W \\ \varphi_{Wy} \\ y_W \\ \varphi_{Wz} \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Machen wir von der geometrischen Beziehung zwischen Rotorschwerpunkt und Wellendurchstoßpunkt Gebrauch,

$$r_S = r_W + e e^{j(\Omega t + \beta)} \tag{2.26}$$

und machen gleichzeitig die komplexe Koordinatenzusammenfassung,

$$\begin{aligned}
r &= r_z + i r_y \\
\varphi &= \varphi_z + i \varphi_y
\end{aligned} \tag{2.27}$$

so erhalten wir als Bewegungsgleichung:[3]

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_W \\ \ddot{\varphi}_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -j \Theta_p \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_W \\ \dot{\varphi}_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & -j c_{12} \\ j c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_W \\ \varphi_W \end{bmatrix} = \\
= \Omega^2 \begin{bmatrix} m e e^{j\beta} \\ (\Theta_a - \Theta_p) \alpha e^{j\gamma} \end{bmatrix} e^{j\Omega t}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Kreiseigenfrequenzen werden dabei in Analogie zur Biegeeigenschwingung, die ihre Anregung aus der Rotorexzentrizität erhält, durch die Schrägstellung α der Hauptträgheitsachse des Kreisels angeregt.

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems von (2.28) liefert ein charakteristisches Polynom, dessen Lösung vier drehzahlabhängige Eigenfrequenzen sind. Aus Platzgründen sollen deren Verläufe anhand von Abbildung 2.19. nur qualitativ diskutiert werden.

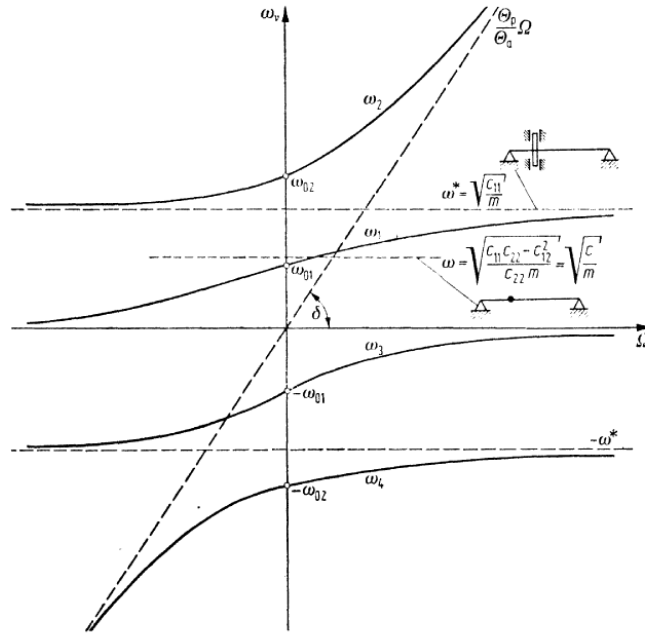


Abbildung 2.19.: Eigenfrequenzen ω_v des fliegend gelagerten Rotors als Funktion der Wellendrehzahl Ω ($\Theta_p > \Theta_a$) [3]

Zunächst erkennt man, daß die Verläufe jeweils zweier paarweise zusammengehöriger Eigenfrequenzen punktsymmetrisch zum Ursprung sind. Wegen dieser Symmetrie kann sich die Diskussion auf Drehzahlen $\Omega > 0$ beschränken. Das eine Paar ist $\omega_1(\Omega)$ und $\omega_3(\Omega)$, das andere $\omega_2(\Omega)$ und $\omega_4(\Omega)$. Zuerst sehen wir auf das Verhalten von $\omega_1(\Omega)$. Für den Fall, daß Ω gegen unendlich strebt, erhält man hier eine Größe der Eigenfrequenz die durch die elastische Wellenkonstante c_{11} und die Rotormasse m bestimmt wird: $\omega^* = \sqrt{\frac{c_{11}}{m}}$. Denn

bei unendlich hoher Drehzahl ist ein Verkippen des Rotors durch den Kreiseinfluß unmöglich. Betrachten wir nun den Fall $\Omega = 0$. Es ist

$$\omega_1(\Omega = 0) = \omega_{01} < \sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{mc_{22}}} = \sqrt{\frac{c}{m}}. \text{ Daß } \omega_{01} \text{ kleiner ist als die Eigenfrequenz, welche}$$

man bei einer Berechnung des Systems als idealisierte Punktmasse erhält, erklärt sich durch den Einfluß der Trägheit der äquatorialen Drehmasse Θ_a . Wir wollen $\omega_1(\Omega)$ die Biegeschwingung (Gleichlauferregung) des Rotorkreisels nennen.

Die zweite sich ergebende Eigenfrequenz $\omega_2(\Omega)$ ist die Nutationseigenfrequenz. $\omega_2(\Omega=0) = \omega_{02}$ ist größer als der Betrag der Asymptote $\omega^* = \sqrt{\frac{c_{11}}{m}}$. Andererseits schmiegt sich $\omega_2(\Omega)$ für sehr große Ω immer enger an die Asymptote $\frac{\Theta_p}{\Theta_a} \Omega$ an.

Die Eigenkreisfrequenz $\omega_3(\Omega)$ wollen wir der Präzession zuordnen; sie hat als Grenzwert im Unendlichen den Wert Null. Die verbleibende Eigenfrequenz $\omega_4(\Omega)$ wollen wir als Biegeeigenfrequenz (Gegenlauf) mit der Asymptote $-\omega^*$ bezeichnen. Die Zuordnung von Präzession, Nutation etc. zu den berechneten Eigenfrequenzen ist nur für $\Omega \gg 0$ zulässig.

2.2.2.2. Kritische Drehzahlen

Weiterhin wollen wir nun die kritischen Drehzahlen des Rotorkreisels betrachten. Sie können im Gleich- oder Gegenlauf angeregt werden. Ein Beispiel für Gleichlauferregung ist die Unwuchterregung; Gegenlauferregung kann durch konstant aus einer Richtung wirkende, nicht umlaufende Kräfte entstehen. Die Bestimmung der kritischen Drehzahlen für Gleich- und Gegenlauf kann man sich qualitativ an den Verläufen der Abbildung 2.20. a) und b) verdeutlichen.

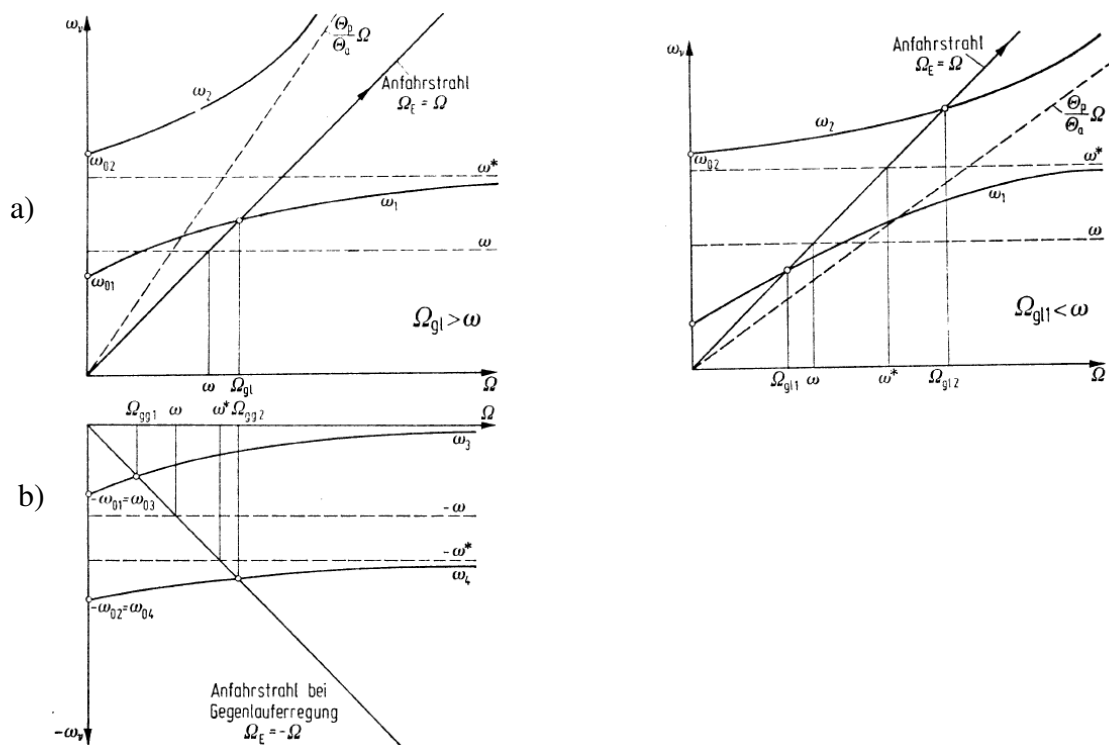


Abbildung 2.20.:a) Gleichlauferregung und b) Gegenlauferregung

Eine kritische Drehzahl liegt dann vor, wenn der Anfahrstrahl $\Omega_E = \Omega$ den Verlauf der Eigenkreisfrequenz schneidet. Wegen der Symmetrie beschränken wir uns auf Drehzahlen $\Omega > 0$.

Bei *Gleichlauferregung* (Abbildung 2.20.a)) hängt die Anzahl der kritischen Drehzahlen vom Verhältnis $\frac{\Theta_p}{\Theta_a}$ ab. Denn ist $\frac{\Theta_p}{\Theta_a} > 1$ kann der Anfahrstrahl nur die Eigenfrequenz $\omega_1(\Omega)$ und nie $\omega_2(\Omega)$ schneiden. Ist $\frac{\Theta_p}{\Theta_a} < 1$, so erhält man zwei Schnittpunkte des Anfahrstrahles mit den Eigenfrequenzen. Ob $\omega_2(\Omega)$ eine neue kritische Drehzahl ergibt, hängt von dem Verhältnis $\frac{\Theta_p}{\Theta_a}$ ab, das für dünne Scheiben ($H \ll R$)

$$\frac{\Theta_p}{\Theta_a} = \frac{\frac{m}{2} R^2}{\frac{m}{12} (3R^2 + H^2)} \approx 2$$

ist.

Die Anzahl der kritischen Drehzahlen ist eins für $\frac{\Theta_p}{\Theta_a} > 1$ und zwei für $\frac{\Theta_p}{\Theta_a} < 1$. Die stets vorhandene biegekritische Drehzahl ist mit Berücksichtigung der Kreiselwirkung größer als diejenige welche man bei Berechnung derselben mit dem Rotormodell der Punktmasse erhält. Der Grund für diesen Umstand liegt im oben bereits erwähnten Kreismoment, welches gerade so wirkt, daß es eine Verformung der Welle behindert. Man kann also davon sprechen, daß die Berücksichtigung der Kreiseffekte in der Rechnung sich genau so ausnimmt, als ob man die Wellensteifigkeit erhöhen würde.

Aus Abbildung 2.20. b) liest man leicht ab, daß es bei *Gegenlauferregung* unabhängig von $\frac{\Theta_p}{\Theta_a}$ immer zwei kritische Drehzahlen geben muß, da weder die Biege - noch die Präzessionsfrequenz im Gegenlaufbereich ($\Omega > 0$) für einen Schnitt mit dem Anfahrstrahl entscheidend von diesem Verhältnis abhängen.

2.2.3. Fliegend gelagerter Rotor mit Flüssigkeitsfüllung

Nun gehen wir zum flüssigkeitsgefüllten, fliegend gelagerten Rotor über. Der erste Schritt hierbei ist die Überlegung, daß zu jeder kritischen Drehzahl des Rotors ein Instabilitätsbereich des mitrotierenden Flüssigkeitsringes gehört. Der Bau von Rotoren mit $\frac{\Theta_p}{\Theta_a} > 1$ bietet

also größere Schwierigkeiten, als wenn $\frac{\Theta_p}{\Theta_a} < 1$ ist.

G. Lichtenberg [11] untersucht in seiner experimentellen und theoretischen Arbeit einen auf elastischer Welle fliegend gelagerten zylindrischen Rotor, der teilweise mit Flüssigkeit gefüllt ist. In seinen theoretischen Untersuchungen verwendet er als Ausgangsgleichungen die linearisierten Bewegungsgleichungen des fliegend gelagerten Rotors sowie die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen und die Kontinuitätsbedingung im bewegten, raumfesten Koordinatensystem mit den zugehörigen Randbedingungen. Die Flüssigkeit wird als reibungsfrei und inkompressibel betrachtet. Die Gleichungen werden in ein Eigenwertproblem umgeformt und Eigenwertberechnungen angestellt. Numerische Berechnungen sagen eine kritische Drehzahl und einen breiten instabilen Drehzahlbereich voraus.

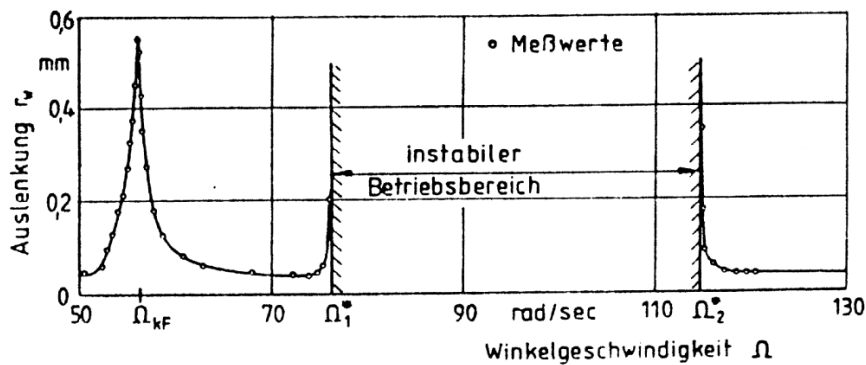
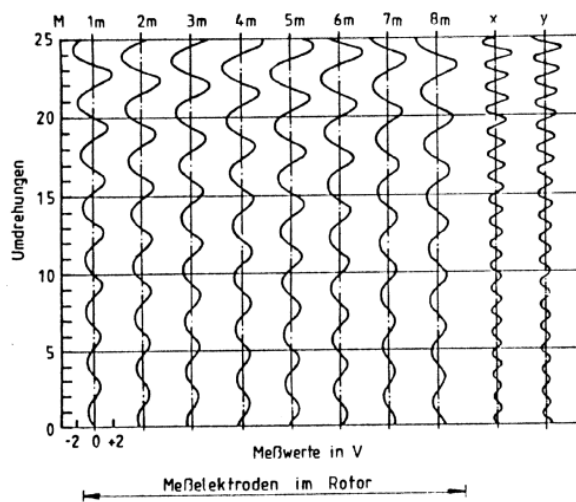
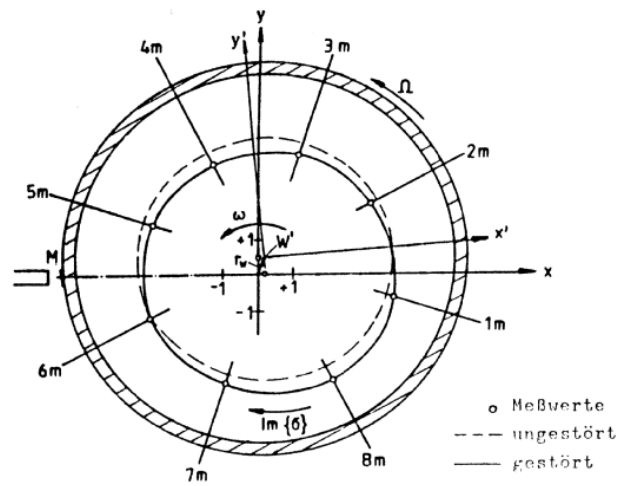


Abbildung 2.21.: Durch Ringwellen verursachter instabiler Drehzahlbereich und kritische Drehzahl bei einem fliegend gelagerten Rotor



a)



b)

Abbildung 2.22.a) Meßwerte der freien Oberflächewelle des Flüssigkeitsringes und
b) daraus konstruierte Flüssigkeitsverteilung einer umlaufenden Welle

Abbildung 2.22. zeigt einen Meßschrieb über die Amplituden der Oberflächenwellen des Flüssigkeitsringes und die daraus konstruierte Form der umlaufenden Oberflächenwelle; anhand dieses Meßschriebes gewinnt Lichtenberg folgende Erkenntnisse: die experimentellen Werte von kritischer Drehzahl und durch Flüssigkeitsschwingung verursachtem Instabilitätsbereich stimmen gut mit den rechnerisch ermittelten Werten überein. Instabile Schwingungen des Gesamtsystems werden nur durch die Grundschwingung der freien Oberfläche angeregt. Diese Oberflächenwelle hat als Frequenz kein ganzzahliges Vielfaches der Rotordrehzahl und läuft in entgegengesetzter Richtung zur Rotordrehung um (asynchrone Gegenlauferregung).

Weitere Ergebnisse der Experimente Lichtenbergs sind:

- 1.) Es wird bestätigt daß die freie Oberfläche der mitrotierenden Flüssigkeit einen zur geometrischen Drehachse symmetrischen Zylinder bildet.
- 2.) Die Flüssigkeitsschwingung, die zu den von Lichtenberg beobachteten Instabilitäten führt, ist eine zweidimensionale Bewegung, wie der Meßschrieb in Abbildung 2.23. zeigt. An drei verschiedenen Stellen des Umfanges wurde bei instabilem Betrieb jeweils am Rotorboden, in Rotormitte und am Rotordeckel die Schwingungsamplitude gemessen.

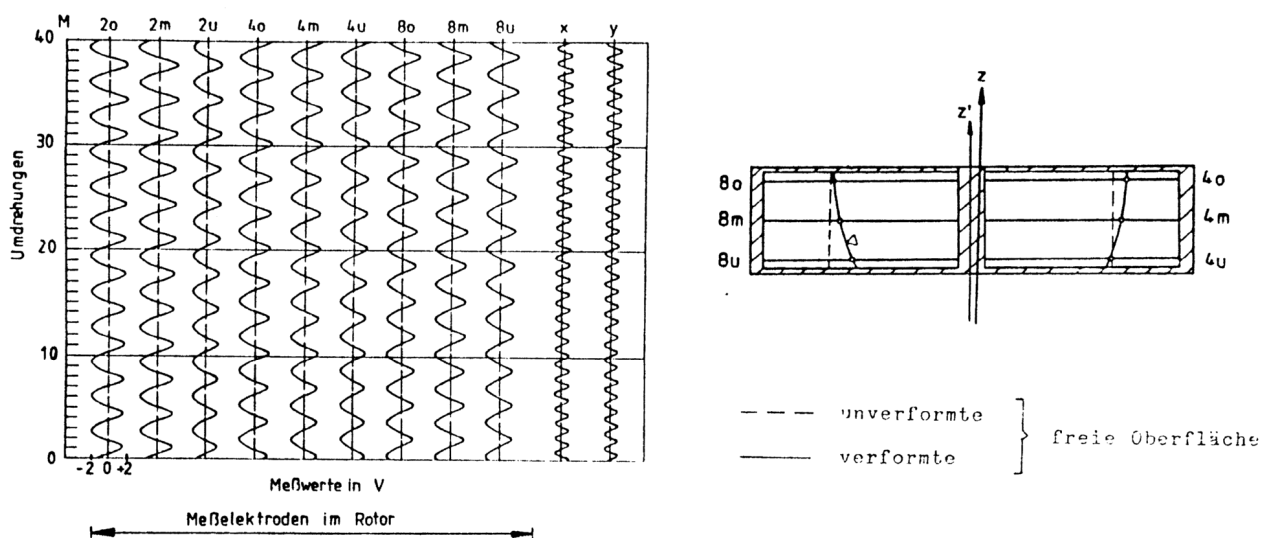


Abbildung 2.23.: Zweidimensionalität der Oberflächenwelle

- 3.) Schließlich ist das rein experimentelle Ergebnis - seine Rechnung behandelt die Flüssigkeit ja reibungslos - über den Einfluß der Flüssigkeitszähigkeit auf die Breite des instabilen Drehzahlbereiches zu erwähnen: Lichtenberg stellt fest, daß mit zunehmender Flüssigkeitszähigkeit der instabile Drehzahlbereich unter Umständen auch größer werden kann (Abbildung 2.24.).

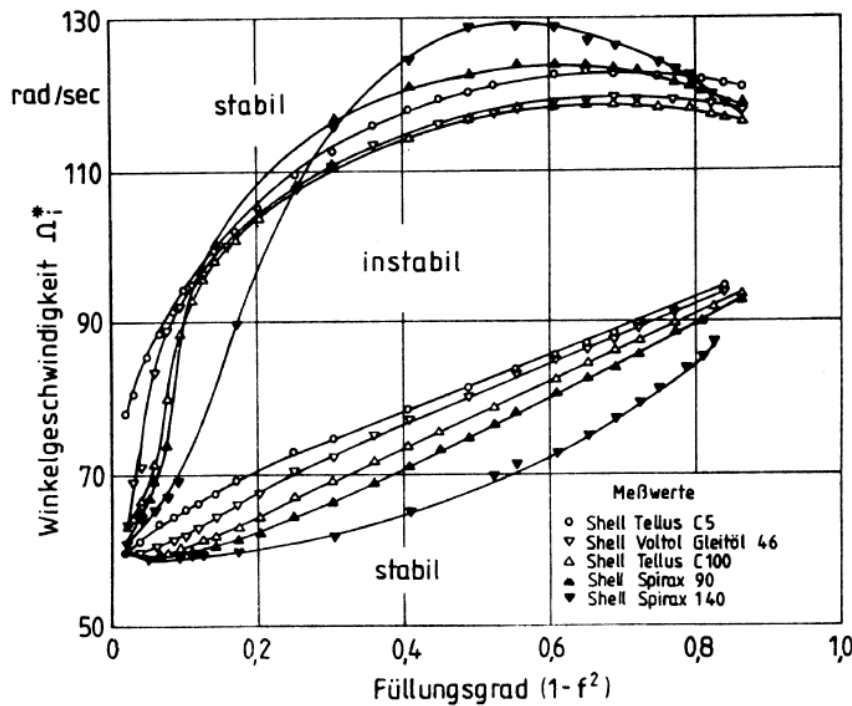


Abbildung 2.24.: Flüssigkeitszähigkeit und Breite des instabilen Drehzahlbereiches

Dies Ergebnis von Lichtenberg scheint ein Widerspruch zu den Rechenergebnissen von Hendricks und Morton zu sein; sie hatten festgestellt, daß der instabile Drehzahlbereich mit zunehmender Zähigkeit der Flüssigkeit im Rotor eingeengt wird. Dabei haben sie ihr Rechenergebnis nicht experimentell überprüft und können nicht nachweisen ob die Vereinfachung, die Ekman - Grenzschichten an Boden und Deckel des Rotors fortzulassen, also die Rechnung für einen unendlich langen Zylinder durchzuführen, statthaft ist. Lichtenberg andererseits verwendet in seinen Experimenten keine äußere Dämpfung, weswegen ein Vergleich mit den Ergebnissen von Hendricks und Morton nicht möglich ist.

Außerdem darf bei den angestellten Überlegungen nicht übersehen werden, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, zwei Flüssigkeiten hinsichtlich ihrer Wirkung auf Instabilitätsgrenzen unmittelbar miteinander zu vergleichen. Das wird deutlich, wenn wir die Einflußparameter auf den instabilen Drehzahlbereich betrachten:

1.) Effektive Masse bzw. Flüssigkeitsdichte $m \sim \rho \pi a^2 (2H_1)$

2.) Reynoldszahl $Re = \frac{(\frac{H_1}{\pi})^2 \Omega}{\nu}$ bzw. Flüssigkeitszähigkeit

3.) Füllparameter $f = \frac{a-t}{a}$

4.) Eigenfrequenz der Ringwelle bezüglich des Rotors (σ)

Gleiche Füllmengen zweier verschiedener Flüssigkeiten unterscheiden sich jeweils in zwei Eigenschaften, der Dichte und der Zähigkeit. Weil diese zwei Eigenschaften an eine Flüssigkeit gebunden sind, verbietet sich ein unmittelbarer Vergleich dieser Flüssigkeiten hinsichtlich ihrer Stabilitätsgrenzen.

Die Hauptfragestellungen, die sich aus dieser Literaturübersicht ergeben sind also die: wie wirkt sich bei einem fliegend gelagerten Rotor mit äußerer Dämpfung Füllungen verschiedener Flüssigkeiten mit unterschiedlicher Viskosität auf die Stabilitätsgrenzen aus? Und: wie ist dabei separat der Einfluß der Flüssigkeitsdichte auf die Stabilitätsgrenzen zu beurteilen? Die Klärung dieser Frage ist ein Ziel dieser Arbeit.

Neben dieser Fragestellung wollen noch andere behandelt werden. Sie betreffen im Wesentlichen konstruktive Gesichtspunkte des hier untersuchten Rotorsystems. Zu diesen gehört die Notwendigkeit eines Fanglagers und eines Motorpendels sowie der Einfluß von innerer und äußerer Dämpfung auf das Rotorsystem.

3. Konstruktive Gesichtspunkte

Wir wenden uns nun konstruktiven Gesichtspunkten des hier untersuchten Rotors zu. In den Teilkapiteln 3.1 und 3.2 wird erläutert, warum eine innere Dämpfung bei dem mit reibungsfreier Flüssigkeit gefüllten Rotor sinnvoll ist, und warum ein sogenanntes Fanglager eingeführt werden muß. Dieses funktioniert aber nur dann, wenn die Welle biegeweich und die kritische Drehzahl klein gehalten werden. Das kommt, wie in den Teilkapiteln 3.3. und 3.4. dargestellt werden soll, der Tatsache entgegen, daß ein flüssigkeitsgefüllter Rotor nicht ausgewuchtet werden kann, und deshalb für niedrige Lagerkräfte gesorgt werden muß. Durch die biegeweiche Welle wird aber die Präzessionseigenfrequenz des Rotorkreisels sehr niedrig und muß stark gedämpft werden. Damit wird eine separate äußere Dämpfung erforderlich. In dem vorliegenden System wurde sie verwirklicht, indem das Gehäuse des Antriebsmotors unterhalb seines Schwerpunktes kardanisch gelagert und in seiner Pendelbewegung gedämpft wird.

3.1. Flüssigkeitsring zur inneren Dämpfung

Henricks und Morton [6] stellen fest, daß es für einen Rotor mit äußerer Dämpfung, der mit reibungsfreier Flüssigkeit gefüllt ist, keinen stabilen Betrieb gibt. Ein stabiler Betrieb ist nur bei Füllung mit zähen Flüssigkeiten zu erreichen.

Wenn für bestimmte Verfahren ein Rotor mit wassergefülltem Ring, das ist praktisch reibungsfreie Flüssigkeit (Abbildung 1.1.(2)) und äußerer Dämpfung gefordert wird, dann kann trotzdem ein stabiler Betrieb mit einem zweiten Flüssigkeitsring (Abbildung 1.1.(3)), der sehr zähe Flüssigkeit enthält, erreicht werden. Diese zweite Flüssigkeit, die in einer separaten Kammer untergebracht sein muß, bewirkt eine Kraft, die neben der radialen vor allem eine tangential Komponente hat, mit der sie der Kraft des äußeren Dämpfers entgegenwirken kann.

Vor Durchführung von Experimenten kann man sich über das Zusammenspiel zweier Flüssigkeitsringe an einem Rotor noch folgendes klarmachen: es muß eine optimale innere Dämpfung für einen Rotor mit gegebener Zähigkeitsfreier Flüssigkeitsfüllung und äußerer Dämpfung zu finden sein. Denn wäre die Zähigkeit der zweiten Flüssigkeit ebenfalls Null, so verschwindet ihre Dämpfungswirkung. Denkt man den anderen Grenzfall einer immer zäher werdenden und schließlich gelartig erstarrenden Flüssigkeit zur inneren Dämpfung, so kommt man ebenfalls bei der Dämpfungswirkung Null an. Daß sich dazwischen Werte der Zähigkeit befinden müssen, wo eine Dämpfungswirkung vorhanden ist zeigen Hendricks und Morton in ihrer Arbeit. Es muß also ein Optimum der Zähigkeit geben.

Um dies beurteilen zu können, muß die Wirkung des viskosen Flüssigkeitsringes auf die Stabilitätsgrenze des Gesamtsystems quantitativ erfaßt werden. Einige Berechnungen zu diesen Fragen wurden mit einem schon vorliegenden Programm ausgeführt und in Kap. 6.2. bzw. 6.7. diskutiert.

3.2. Fanglager zum Durchfahren instabiler Drehzahlbereiche

In Kapitel 2 konnten wir feststellen, daß ein überkritischer Betrieb von flüssigkeitsgefüllten Rotoren möglich ist, weil auch sie dort das Phänomen der Selbstzentrierung zeigen und sich der mitrotierende Flüssigkeitsring so einstellt, daß seine Oberfläche einen zur idealen Drehachse konzentrischen Zylinder bildet. Jedoch muß der breite, instabile Drehzahlbereich überwunden werden. Das kann durch ein axial verschiebliches, sogenanntes Fanglager geschehen, welches zusätzlich zu den vorhandenen Rotorlagern angebracht wird, und in einer der beiden Stellungen die Rotorwelle versteift. In einer Stellung ist das Fanglager von der Rotorwelle getrennt, in der anderen mit dieser über einen Fanglagerkonus (Abbildung 1.1. (5)) verbunden. Von einer Stellung zur anderen gelangt man durch axiales Verschieben des Fanglagers, und zwar hydraulisch. Die Steifigkeit der Welle ändert sich beim Verschieben des Lagers. Die biegekritische Drehzahl wie auch der durch die Flüssigkeitswellen verursachte breite instabile Drehzahlbereich, werden dabei zu höheren Werten verschoben. Für zwei Stellungen des Fanglagers sind qualitativ die instabilen Drehzahlbereiche in Abbildung 3.1. dargestellt. Anhand von ihnen wollen wir den Verlauf einer Rotorbeschleunigung ins Überkritische erläutern.

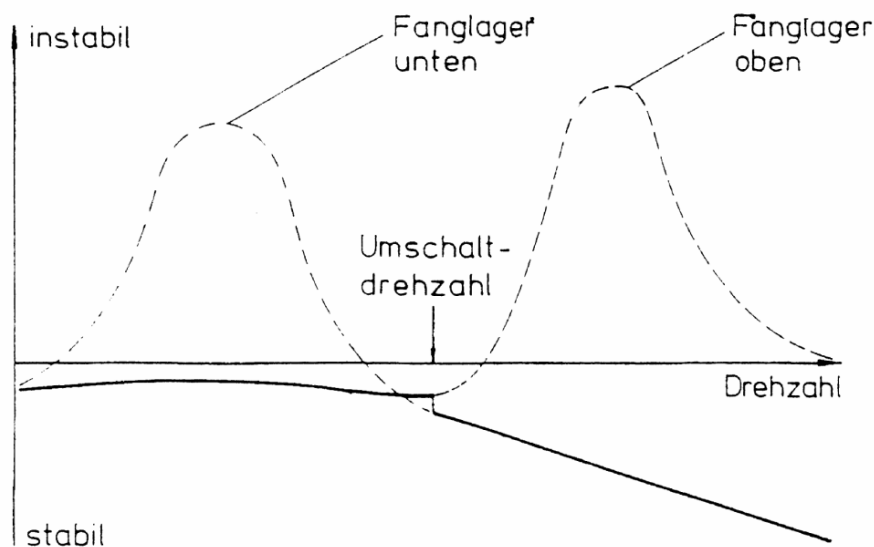


Abbildung 3.1.: Schematische Darstellung der instabilen Drehzahlbereiche mit und ohne Fanglager

Bei hoher Steifigkeit der Welle (Fanglager "oben") liegt der instabile Drehzahlbereich bei entsprechend hohen Werten der Drehzahl. Man kann also den Rotor von Drehzahl 0 an bis in die Nähe der unteren Instabilitätsgrenze hochfahren. Dann zieht man das Fanglager ab. Bei dieser Drehzahl und der nun verminderten Wellensteifigkeit wird in den überkritischen Bereich gesprungen, zu dem der bei tieferen Drehzahlen liegende Instabilitätsbereich gehört. Das weitere Hochfahren ist nun möglich. Allerdings ist der instationäre Vorgang beim Abziehen des Fanglagers genau zu prüfen.

3.3. Dämpfungskammer

Das Abziehen des Fanglagers geschieht sprungartig, weil die vorher fest haftenden Konusflächen plötzlich auseinandergezogen werden. Es wirken unsymmetrische Kräfte und regen die Eigenmoden des Rotorkreisels an.

Ohne das hochgeschobene Fanglager ist die Rotorwelle (Abbildung 1.1. (9)) "biegeweich" (Wellendurchmesser $d \ll$ Länge der Welle l), um die Lagerbelastung im überkritischen Betrieb klein zu halten. Dann stellt sich der Rotorschwerpunkt nahezu auf die ideale Drehachse ein, und der Rotorkreisel richtet sich zu seiner Hauptträgheitsachse auf. Je kleiner dabei das Verhältnis d^4/l^3 ist, desto kleiner ist die Lagerbelastung. Darauf muß besonders geachtet werden, denn der Rotor mit den kompliziert eingearbeiteten Flüssigkeitsringen kann höchstens auf 2/100 mm genau auf einer guten Drehbank hergestellt werden, und die im Betrieb umlaufenden Flüssigkeitswellen würden jede Auswuchtung des leeren Rotors allein wieder aufheben.

Die biegeaweiche Welle bringt jedoch für den Rotorkreisel eine sehr kleine Präzessionseigenfrequenz mit sich, die mit steigender Drehzahl gegen 0 geht. Diese muß so weit wie möglich gedämpft werden, denn Schwingungen geringer Frequenz sind schwach gedämpft. Starke Dämpfung für die Präzessionsschwingung ist außerdem notwendig, da man vermuten muß, daß die Präzessionseigenfrequenz durch Saugkräfte, die in der Spaltströmung zwischen Rotor und Kesselwand entstehen können, wenn der Rotor nicht symmetrisch im Rotorkessel sitzt, ebenfalls angeregt wird. Die Vorgänge beim Abziehen des Fanglagers werden in Kapitel 5.5. genauer behandelt.

Es zeigt sich, daß eine recht hohe Dämpfung vorzusehen ist. Sie wird hier über eine Dämpfungskammer (Abbildung 1.1., Teil (8)) realisiert, die aus einer Nut und einer Zarge besteht. Im Spalt zwischen beiden wird hochviskoses Dämpfungöl eingefüllt.

3.4. Motorpendel

Bei dieser Konstruktion kann die Dämpfung leicht durch die Füllhöhe variiert werden. Dazu muß man den Rotorkreisel mit der biegeweichen Welle in einem *Motorpendel* lagern, welches sich frei um die Achsen eines Kardangelenkes (Abbildung 1.1. (14)) bewegen kann. Unter dem Begriff Motorpendel wollen wir hierbei die Teile Motorwelle, Motorwicklung und Motorgehäuse verstehen. (Abbildung 1.1., Teile (10),(11),(13)). Dabei wird das Motorpendel durch die Welle mit der Schwingung des Rotorkreisels gekoppelt. Die auf das Motorpendel wirkende Dämpfung bringt dann die Schwingung des Motorpendels, und über die Koppelung durch die Welle, auch die Schwingungsmoden des Rotors zum Abklingen.

Im überkritischen Bereich wird das Motorpendel durch die Selbstzentrierung des Rotorkreisels vertikal stabilisiert. Wichtig ist die genaue vertikale Ausrichtung durch Schraubenfedern, die in Abbildung 1.1. nicht zu sehen sind und sich dort in der Höhe des Dämpfungskammerspaltes befinden.

Das Fanglager kann nur geschaltet werden, wenn sich das Motorpendel nicht um die Kardanachsen bewegen kann und vertikal stabilisiert ist. Deshalb wurde für das Motorpendel eine sogenannte Zentriervorrichtung (in Abbildung 1.1. nicht gezeichnet; dort ist eine ältere Konstruktion zu sehen) vorgesehen: In der Stellung "fest" werden durch eine Kurvenscheibe vier Kipphebel an das Motorpendel gedrückt und so jede Bewegung des Motorpendels verhindert.

Die Motorwelle ist eine Hohlwelle mit relativ großem Außendurchmesser, wodurch diese sehr steif wird, und die Eigenfrequenzen des auf der Motorwelle sitzenden Motorläufers so hoch, daß sie den Betrieb des Rotorsystems nicht gefährden. Gestaltet man die Motorwelle als Hohlwelle kann man zusätzlich die biegeweiche Welle verwirklichen. Da das Flächenträgheitsmoment $\sim d^4$ ist, wirkt sich fehlendes Material in Wellenmitte nicht stark auf den Wert des Flächenträgheitsmomentes bzw. der Wellensteifigkeit aus.

3.5. Übersicht zu den Eigenmoden und deren Dämpfung

Abschließend beschreiben wir die Eigenmoden und die Dämpfung der einzelnen Teile des Rotorsystems. Das System besteht aus drei gekoppelten schwingungsfähigen Teilsystemen:

1. Rotorkreisel
2. Motorpendel
3. Flüssigkeitsring

Die beiden Massen, der Rotorkreisel und das Motorpendel sind über die elastische Welle, die hier masselos angenommen wird, gekoppelt. Die Flüssigkeitsringe sind mit dem Rotorkreisel mindestens über die Auslenkungen r des Rotorschwerpunktes und ϕ der Rotorhauptträgheits-achse gekoppelt. Dies gilt, solange stationäre Schwingungsvorgänge betrachtet werden, wie im theoretischen Teil dieser Arbeit. Bei instationären Vorgängen, wie bei der impulsartigen Erregung im experimentellen Teil dieser Arbeit, kommen auch Kopplungen in den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Frage.

1. Der Rotorkreisel hat vier Eigenfrequenzen. Die Eigenfrequenz mit dem höchsten Wert ist die gleichlauferregte Nutation. Beim hier untersuchten Rotor wurde sie nie beobachtet; offensichtlich ist ihre Anregungsenergie bzw. Dämpfung im Vergleich zu den vorhandenen, anregenden Kräften sehr hoch. Die zweitgrößte Eigenfrequenz ist die gleichlauferregte Biegeschwingung. Sie wird durch die drehzahlsynchrone Unwucht und Kräfte, die bei Fanglagerumschaltungen stoßartig auftreten, angeregt. Ihre Dämpfung haben wir gesondert zu untersuchen (siehe Kap. 6). Die Präzessionseigenfrequenz wird nur im Gegenlauf bei Fanglagerumschaltungen und vermutlich durch Saugkräfte der Gasströmung zwischen Rotorrand und Kesselwand angeregt. Wegen ihrer geringen Eigenfrequenz ist es schwierig, ausreichende Dämpfung zu erreichen. Die vierte Kreiseigenfrequenz ist die gegenlauferregte Biegeschwingung; für sie gilt hinsichtlich Anregung und Dämpfung das bei der Nutation Gesagte.

2. Die zweite Masse, das Motorpendel, hat zwei Eigenfrequenzen, eine gleich- und eine gegenlauferregte. Die gegenlauferregte Eigenfrequenz des Motorpendels hat einen sehr geringen Wert (ca. 10^{-3} Hz) und ist stets gut gedämpft. Die gleichlauferregte Motorpendelschwingung ist eine kriechende, sehr stark gedämpfte Bewegung.

3. Der Rotor trägt einen Flüssigkeitsring mit wässriger, nahezu reibungsfreier Flüssigkeit und einen mit sehr viskoser Flüssigkeit. Beide Flüssigkeitsringe haben je zwei Eigenfrequenzen. Die Ringwellen der einen Art laufen relativ zum Rotor gesehen in Drehrichtung um, die der anderen entgegengesetzt dazu. Erstere sind für beide Flüssigkeitsringe gut gedämpft und waren bisher nicht zu beobachten. Bei den gegenlaufenden Ringwellen gibt es Drehzahlbereiche mit, und solche ohne Anfachung. Oberer und unterer Flüssigkeitsring unterscheiden sich wegen ihrer Viskosität. Bei Drehzahlen, wo die Anfachung des Flüssig-

keitsringes mit wässriger Flüssigkeit beginnt, hat der Flüssigkeitsring mit zäher Flüssigkeit noch Dämpfung. Wir müssen also auf die Dämpfung und Anfachung der Wasserringwelle (Gegenlauf) besonders achten.

Wir ziehen folgenden Schluß: die äußere Dämpfung ist für die drei gefährlichen Eigenmoden: Präzession (Gegenlauf), Biegeschwingung (Gleichlauf) und Wasserringwelle (Gegenlauf relativ zum Rotor) so günstig wie möglich zu gestalten. Von diesen ist die Präzession die wichtigste, da sie die geringste Eigenfrequenz und schwächste Dämpfung hat. Die Optimierung der äußeren Dämpfung für diese drei Eigenmoden ist Ziel dieser Arbeit.

Nicht eingegangen sind wir bisher auf die Schwingungen des Motorläufers auf der Motorwelle, der als Lavalrotor zwischen zwei steifen Lagern anzusehen ist und dementsprechend mindestens zwei Eigenfrequenzen hat. Sie sind hier durch die große Steifigkeit der Motorwelle so hoch, daß sie nicht angeregt werden. Das ist wichtig, da sonst ein weiterer, von der Flüssigkeitsfüllung verursachter, instabiler Drehzahlbereich auftreten würde.

Zusammenfassung

Ziel 1: Es sollen die Stabilitätsgrenzen eines fliegend gelagerten Rotors mit äußerer Dämpfung für Flüssigkeiten verschiedener Zähigkeit und Dichte untersucht werden. Dabei wollen wir den Einfluß von Zähigkeit und Dichte auf die Stabilitätsgrenzen des Rotors separat anhand einer Rechnung beurteilen.

Ziel 2: Dann wollen wir die Stabilitätsgrenzen des hier untersuchten Rotorsystems betrachten, wenn die innere Dämpfung durch einen ölgefüllten Rotor dazukommt.

Ziel 3: Schließlich wollen wir für dieses Rotorsystem die optimalen Werte der äußeren Dämpfung für Biegeschwingung (Gleichlauf), Präzession (Gegenlauf), und die das System stark störende Wasserringwelle (Gegenlauf relativ zum Rotorsystem) herausfinden und einen optimalen Wert festzulegen suchen.

Die Fragen sollen experimentell und rechnerisch geklärt werden. Durch die Experimente kann man überprüfen, ob die Annahmen und Vereinfachungen einer Modellrechnung zutreffen. Die Experimente werden mit einem kleinen Versuchsrotor, der zwei Flüssigkeitsringe aufweist, durchgeführt.

Das in dieser Arbeit verwendete Modell ist in Abbildung 4.1. gezeigt. Es handelt sich um ein System zweier Massen: der Rotorscheibe und des kardanisch gestützten Motorpendels. Zunächst sollen die Bewegungen der beiden Massen und die Abweichungen, die sich aus dem als starr angenommenen Maschinengestell ergeben, beschrieben werden. Im Anschluß daran wollen wir die verbleibenden Elemente des Modells behandeln.

Eine der zwei Massen ist der Rotor ($\Theta_{aR}, \Theta_{pR}, m_R$). Er sei - abgesehen von den noch zu erwähnenden Abweichungen - von idealer geometrischer Gestalt und aus homogenem Werkstoff hergestellt. Seine Wellenbohrung habe die Exzentrizität e vom Schwerpunkt und die Schrägstellung α_1 gegen die Hauptträgheitsachse. Er kann als eine rotationssymmetrische Scheibe angesehen werden. Er trägt zwei Flüssigkeitsringe (Außenradien R_1, R_2 ; Ringhöhen $2H_1, 2H_2$; Flüssigkeitstiefen T_1, T_2), deren Querschnitte im Modell rechteckig angenommen werden, während der Rotor einen Querschnitt mit Rundungen ($r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$) aufweist. Die Masse des Öringdeckels (vgl. Abbildung 4.1.), der ein Auslaufen des Dämpfungöls aus dem unteren Ring im Stillstand verhindert, wird dem Rotor zugeschlagen und bei der Berechnung der Trägheitsmomente des Rotors entsprechend berücksichtigt.

Die zweite Masse, das Motorpendel ($\Theta_{aMP}, \Theta_{pMP}$) sei durch ein Kardangelenk weit unterhalb seines Schwerpunktes starr und spielfrei mit dem Maschinengestell verbunden. Das axiale Massenträgheitsmoment Θ_{aMP} bezüglich irgendeiner horizontalen Achse durch das Kardangelenk umfaßt das ganze Motorpendel, während das polare Trägheitsmoment Θ_{pMP} bezüglich der vertikalen Drehachse nur aus dem Motorläufer und dem relativ dicken Teil der Welle gebildet wird; nur diese beiden Teile können durch ihre Rotation ein gyroskopisches Moment verursachen, denn das Motorgehäuse dreht sich nicht um die vertikale Achse. Der Motorläufer sitzt auf der Motorwelle, einer Hohlwelle, die im pendelnden Motorgehäuse durch ölgeschmierte Gleitlager steif gelagert ist. Im Modell nehmen wir wegen der hohen Steifigkeit dieser Lager relativ zu der Steifigkeit der Rotorwelle starre Lager an.

Die Rotorwelle (Elastizitätsmodul E , Flächenträgheitsmoment I) sei in der Motorwelle durch einen Preßsitz so befestigt, daß von einer festen Einspannung ausgegangen werden kann. Die zylindrische Passung zwischen Rotorwelle und Rotorbohrung ist ein leichter Schiebesitz. Der Sitz der schweren Rotorscheibe auf der Welle wird außerdem durch die Abstützung auf einem 60° - Konus am Rotorfuß bestimmt. Konstruktive Voraussetzung für die leichte Verbindung mit einem Schiebesitz ist die lange, biegeeweiche Rotorwelle. Die Biegung der Welle zwischen der zylindrischen Passung oben und dem Konus unten muß in die elastischen Konstanten eingearbeitet werden. Die beiden Massen von Rotorscheibe und Motorpendel werden also allein durch die Rotorwelle verbunden. Von der Rotorwelle wol-

len wir weiter annehmen, daß sie dehnstarr sei; dazu sind wir berechtigt, weil Normalkräfte die von der Welle in Achsrichtung aufzubringen sind, nur eine kleine Größe haben; jene entstehen aus dem Eigengewicht des Rotors bzw. aus Zentrifugalkräften durch Rotationsbewegungen des Rotors um den Einspannpunkt der Rotorwelle im Motorpendel. Ebenfalls vernachlässigbar ist die Schubverformung der Welle aus Kräften senkrecht zu ihrer Symmetrieachse; somit nehmen wir an, die Welle sei schubstarr. Torsionsschwingungen des Motorläufers und Biegeschwingungen des Rotors wurden nur entkoppelt beobachtet; somit kann die Welle torsionsstarr angenommen werden.

Das Maschinenengestell ist sehr steif mit dem Fundament verschraubt. Eigenschwingungen des Gestells existieren zwar, jedoch ergaben Messungen nur sehr kleine Schwingungsamplituden; diese Eigenschwingungen werden deshalb zur Vereinfachung fortgelassen.

4.1.2. Festlegung der Koordinaten

Im folgenden wollen wir die Freiheitsgrade und Koordinaten des Zweimassensystems überlegen.

Jeder frei bewegliche, starre Körper mit räumlicher Ausdehnung hat sechs Freiheitsgrade, davon beschreiben drei die Translationsbewegungen des Schwerpunktes und drei die Rotationsbewegungen um die drei Hauptträgheitsachsen des Körpers. Jeder Freiheitsgrad kann mathematisch durch eine Koordinate beschrieben werden. Die freie Beweglichkeit wird aber durch die schon beschriebene Lagerung eingeschränkt.

Beim Rotor, der ersten Masse unseres Systems wird die vertikale Translation in Richtung der Wellenachse durch den Sitz auf der Rotorwelle bzw. das Gewicht der Rotorscheibe verhindert. Zudem wollen wir die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen um die Ruhelage aufstellen, so daß wir die Translation in axialer Richtung auch bei Kippbewegungen des Rotors vernachlässigen können. Außer diesem Freiheitsgrad können wir noch einen zweiten Freiheitsgrad noch vor Beginn der eigentlichen Rechnung abhandeln, indem wir annehmen, daß die Bewegung des Rotors um die vertikale Drehachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit erfolgt. Dabei dürfen wir allerdings nicht vergessen, daß immer dann zusätzliche Antriebsenergie in den Rotor gesteckt wird, wenn die Schwingungsamplitude des Rotors sich vergrößert. Im folgenden werden wir uns mit dem stationären Betriebszustand des Rotors beschäftigen, bei dem der Rotor durch Zwangskräfte (Biegemoment und Querkraft der Welle) auf einer Kreisbahn gehalten wird.

Von den sechs Freiheitsgraden bleiben also vier.

Die Translation soll mit den Koordinaten r_y und r_z und die Rotation mit den Winkeln φ_y und φ_z beschrieben werden.

Das Motorpendel verliert alle Freiheitsgrade der Translation durch die Annahme einer spielfreien Lagerung des Motorpendels durch das Kardangelenk. Mit dem Rotationsfreiheitsgrad der Drehung um die Vertikale steht es beim Motorpendel wie beim Rotor. Er ist vorzeitig durch die Annahme konstanter Winkelgeschwindigkeit um diese Achse abgehandelt. Es bleiben also zwei Freiheitsgrade der Rotation um horizontale Achsen durch die Mitte des Kardangelenkes übrig.

Die verbleibenden zwei Rotationsfreiheitsgrade des Motorpendels sollen mit den Koordinaten ϑ_y und ϑ_z beschrieben werden.

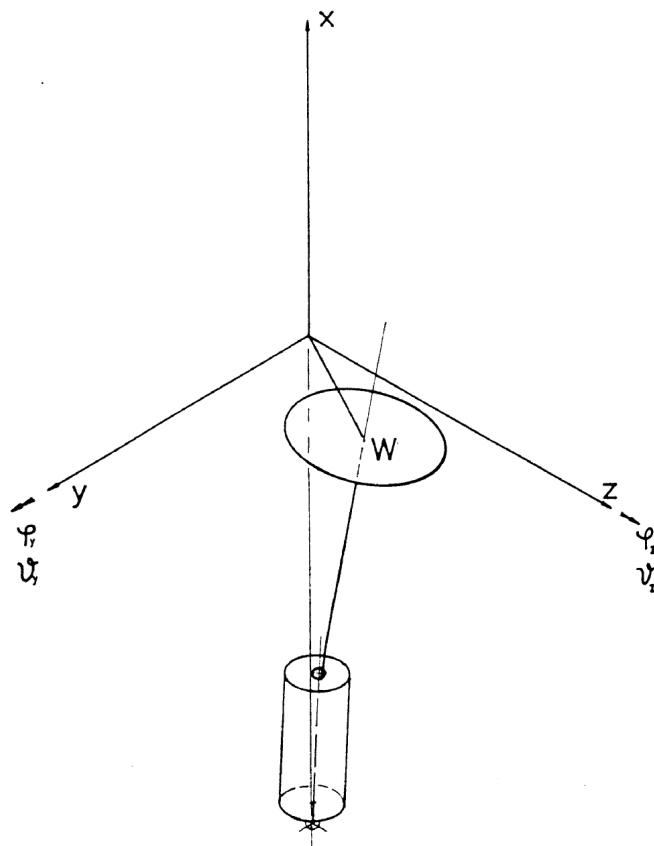


Abbildung 4.2.: Koordinaten des Rotorsystems

Nun können wir die Zahl der Koordinaten mathematisch noch weiter reduzieren. Denn in Kapitel 2 hatten wir festgestellt, daß sich der Rotor auf Kreis - bzw. Spiralbahnen um die ideale Drehachse bewegt. Die Schwingungen des Modellsystems seien also zirkular - polarisiert. Die zirkular - polarisierte Schwingung entspricht einer Kreisbahn des Rotorschwerpunktes mit Radius r , einer Bewegung der Rotorwelle auf einem Kreiskegel mit dem Winkel φ und einer Bewegung der Motorpendelachse auf einem Kreiskegel mit dem Winkel ϑ . Wir fassen nun je zwei zusammengehörige Koordinaten $r_y, r_z, \varphi_y, \varphi_z, \vartheta_y, \vartheta_z$ komplex zusammen:

$$r = r_z + i r_y$$

$$\varphi = \varphi_z + i \varphi_y$$

$$\vartheta = \vartheta_z + i \vartheta_y$$

Das Koordinatensystem mit den Achsen y und z habe seinen Ursprung im Wellendurchstoßpunkt des Rotors bei unausgelenkter Welle und liege in der Ebene senkrecht zur idealen Drehachse. Außerdem liege noch eine Achse x so, daß mit den bereits erwähnten Achsen ein rechtshändiges Koordinatensystem entsteht.

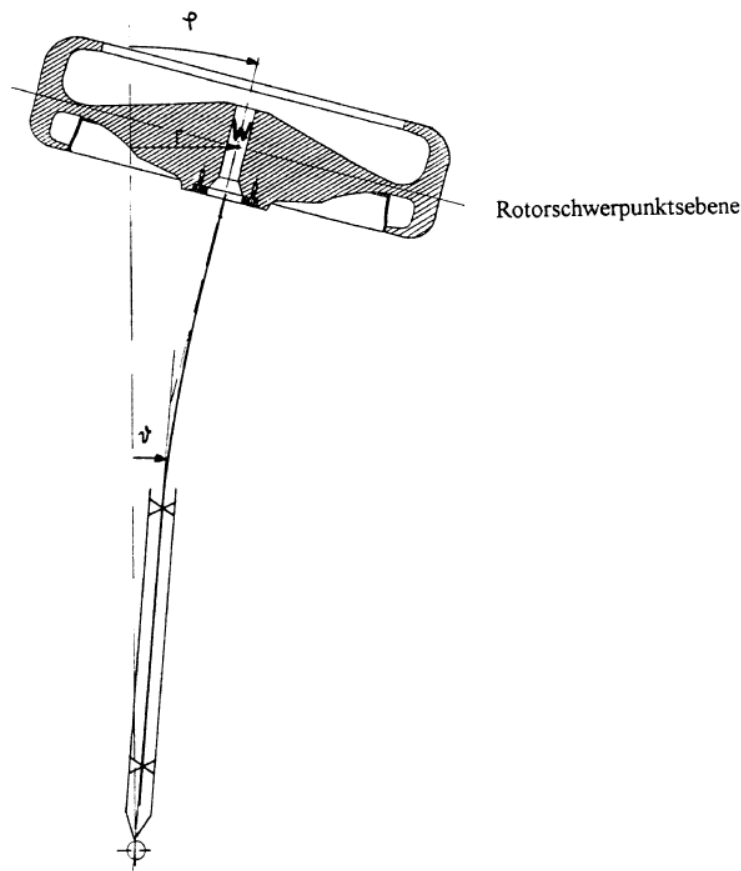


Abbildung 4.3.: Koordinatensystem bzw. Freiheitsgrade für die Bewegungsgleichungen

Die Bewegungen des Rotor - Motorpendelsystems mit seinen sechs Freiheitsgraden wird in der beschriebenen Lagerung also durch drei komplexe Koordinaten behandelt. Die Koordinate r bezeichne die Auslenkung des Wellendurchstoßpunktes des Rotors von der Vertikalen (=ideale Drehachse). Mit φ wird der Winkel der Hauptträgheitsachse bzw. des Wellenendes am Rotorsitz gegenüber der Vertikalen beschrieben, mit ϑ der Winkel zwischen der Vertikalen und der momentanen Lage der Motorpendelachse.

Abschließend wollen wir die in den Kapiteln 4.1.1. und 4.1.2. gemachten Voraussetzungen nochmals zusammenfassen:

- 1) Die Rotorwelle sei in der Motorwelle fest eingespannt.
- 2) Die Motorwelle sei im Motorpendel starr gelagert; ebenso sei die kardanische Lagerung des Motorpendels am Maschinengestell starr und spielfrei.
- 3) Die Welle sei dehnstarr, schubstarr und torsionsstarr.
- 4) Es sollen keine äußeren Kräfte und Momente auf das Rotor - Motorpendelsystem wirken, außer denen, die aus den Unwuchten und der Flüssigkeitsfüllung resultieren.
- 5) Die Bewegungsgleichungen werden für kleine Auslenkungen um die vertikale Symmetrieachse aufgestellt.
- 6) Die Erdbeschleunigung ist gegenüber der Zentrifugalbeschleunigung vernachlässigbar: die von der Erdbeschleunigung herrührenden Drehmomente seien klein gegenüber allen anderen Momenten, die bei Drehzahlen über ca. 5 Hz auftreten, und werden deshalb nicht berücksichtigt.
- 7) Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors sei jeweils konstant
- 8) Für konstantes Ω rotiere die Flüssigkeit in gleichmäßiger Verteilung über den Umfang und vertikaler Oberfläche starr mit dem Rotor. Der Einfluß durch umlaufende Wellen wird als äußere Kraft formuliert.
- 9) Schwingungen des Gestells, mit dem das Motorpendel über Kardangelenke, Dämpfungskammer und Federung verbunden ist, seien klein gegen die restlichen Schwingungen und werden vernachlässigt. Das erfordert allerdings eine sehr steife Ausführung des Maschinengestells, die auch gegeben war.

4.1.3. Die Bewegungsgleichungen des Rotors auf fliegender Welle

4.1.3.1. Übersicht und Schnittbild

Nun stellen wir die Bewegungsgleichungen in den Koordinaten r, φ und ϑ auf. Dazu verwenden wir die Grundgleichungen: für Translationsfreiheitsgrade den Kräftesatz und für Rotationsfreiheitsgrade den Momentensatz. In diesen Grundgleichungen schreiben wir zunächst nur die an einem Schnittbild gewonnenen Kräfte und Momente in allgemeinen Symbolen an.

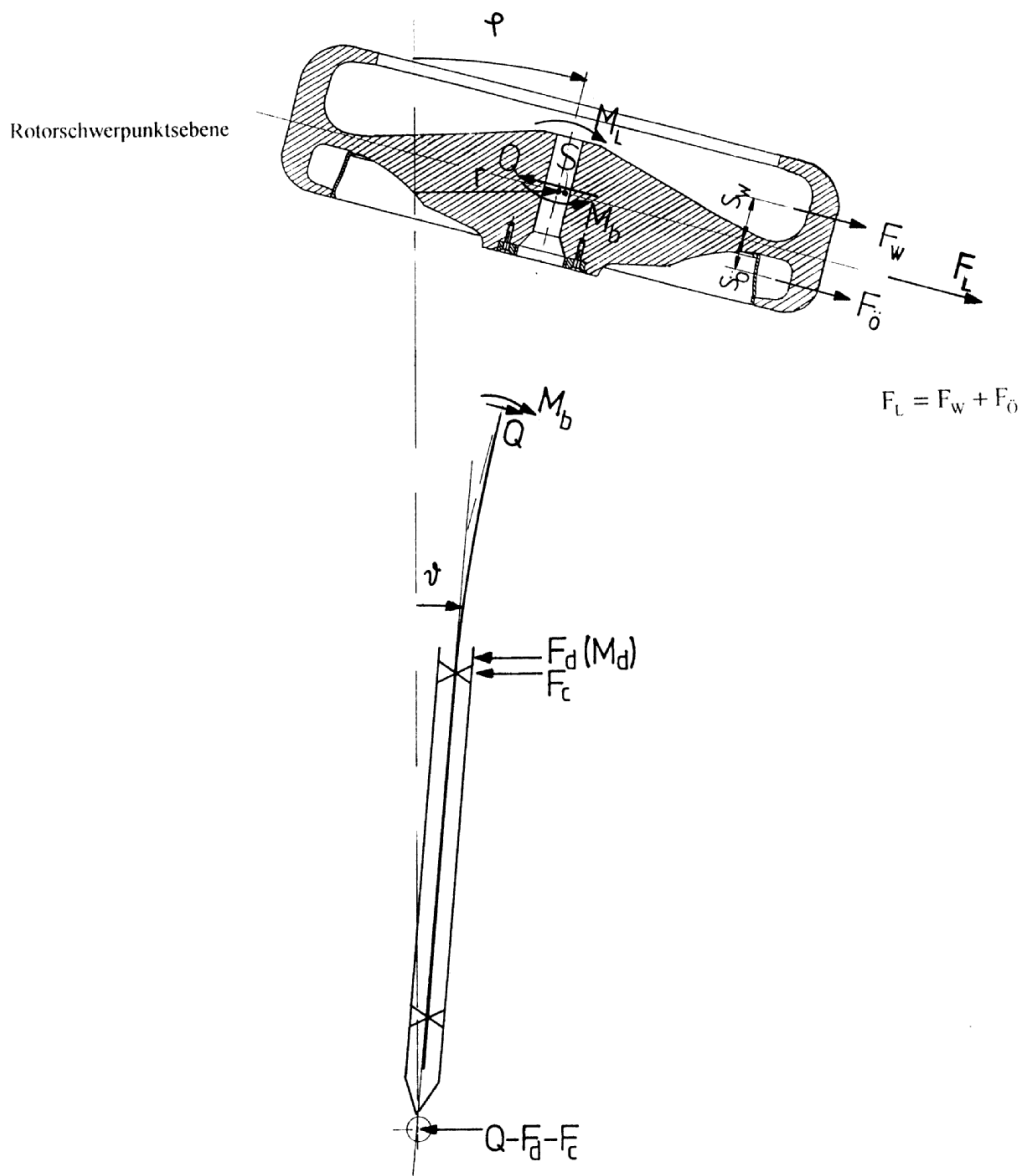


Abbildung 4.4.: Schnittbild

Am Schnittbild (Abbildung 4.4.) erkennt man einerseits Kräfte und Momente, welche aus der ausgelenkten Lage des Rotors bzw. aus der Schrägstellung seiner Hauptträgheitsachsen stammen. Diese beschleunigen den Rotor aus seiner Ruhelage. Außerdem findet man Kräfte und Momente aus der Flüssigkeitsfüllung, die wir als äußere Kräfte auffassen wollen. Als dritte Gruppe hat man rücktreibende Kräfte und Momente und ein dämpfendes Moment. Diese sind: Federkraft und Dämpfungsmoment am Motorpendel, Querkraft und Biegemoment der Welle.

Im weiteren Verlauf ersetzen wir die allgemeinen Symbole für Kräfte und Momente so, daß daraus die eigentlichen Bewegungsdifferentialgleichungen mit den Zeitableitungen der Koordinaten entstehen. Für das Dämpfungsmoment greifen wir dabei auf ein Literaturergebnis zurück. Für Kraft und Moment der Flüssigkeitsfüllung sind bestehende Lösungen aus Arbeiten von J. R. Wolf [19] bzw. R Koehler [8] zugänglich. Die Symbole von Querkraft und Biegemoment ersetzen wir dadurch, daß wir ein Gleichungssystem anschreiben, welches den Zusammenhang herstellt zwischen der Verformung (Auslenkung, Winkel) der Welle und der Belastung (Querkraft, Biegemoment) derselben. Das Gleichungssystem lösen wir nach Querkraft und Biegemoment auf, und setzen letztere in die Grundgleichungen ein. Diese Art, die elastischen Elemente in die Bewegungsgleichungen einzuführen, ist dem Buch von R. Grammel [4] entnommen.

4.1.3.2. Aufstellen der Bewegungsgleichungen aus den Grundgleichungen

a) Rotor, Koordinate r

Beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen - wir tun dies nach den Erfahrungen von Kapitel 2 sofort für den Wellendurchstoßpunkt - aus den Grundgleichungen kommt zuerst die Koordinate r in Behandlung. Für diese Bewegungsgleichung verwenden wir den Kräfte-satz. Die Rotor - Masse m_R wird in der Koordinate r im ausgelenkten Zustand durch die rücktreibende Kraft der Welle (Querkraft Q), die Unwuchtkraft $m_R e \Omega^2$ und die von der Flüssigkeit auf den Rotor ausgeübte Kraft F_L beschleunigt. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\rightarrow: \quad m_R \ddot{r} = e m_R \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta)} + F_L - Q \quad (4.1).$$

Durch die Annahme einer zirkular - polarisierten Schwingung bzw. einer Kreisbahn des Rotors sind ebenso wie der Bahnradius r auch alle anderen Größen komplex, d.h. mit Betrag und Phasenwinkel versehen.

b) Rotor, Koordinate φ

Beim Aufstellen der zweiten Bewegungsgleichung - der für den Rotationsfreiheitsgrad φ - greifen wir auf die Überlegungen in Kapitel 2.2.1. zurück. Dort hatten wir die Momente berechnet, welche durch einen Kreisel verursacht werden. Sie lauten:

$$\begin{aligned} M_y = \dot{L}_y &= \Theta_a \ddot{\varphi}_y - \Omega \Theta_p \dot{\varphi}_z \\ M_z = \dot{L}_z &= \Theta_a \ddot{\varphi}_z + \Omega \Theta_p \dot{\varphi}_y \end{aligned} \quad (4.2)$$

Diese Momente müssen wir nun an unsere komplexe Koordinate φ anpassen. Das tun wir über die Beziehung:

$$M = M_z + jM_y \quad (4.3)$$

$$M = \Theta_a \ddot{\varphi}_z + \Omega \Theta_p \dot{\varphi}_y + j(\Theta_a \ddot{\varphi}_y - \Omega \Theta_p \dot{\varphi}_z) \quad (4.4)$$

Vereinfacht man und faßt die Koordinaten wie oben angegeben zusammen, ergibt sich:

$$M = \Theta_a \ddot{\varphi} - j\Omega \Theta_p \dot{\varphi} \quad (4.5)$$

Die vollständige zweite Bewegungsgleichung bezüglich des Wellendurchstoßpunktes lautet, wenn man die Momentensatz bezüglich des Rotorschwerpunktes anschreibt:

$$\overset{\curvearrowright}{RS}: \quad \Theta_{aR} \ddot{\varphi} - j\Omega \Theta_{pR} \dot{\varphi} = \alpha_1 (\Theta_{aR} - \Theta_{pR}) \Omega^2 e^{j(\Omega t + \gamma)} + M_L - M_b \quad (4.6)$$

Darin sind M_b das von der Welle ausgeübte Biegemoment und M_L das von der Flüssigkeit auf den Rotor ausgeübte Moment. Der erste Term auf der rechten Seite liegt in der Schrägstellung der Hauptträgheitsachse des Rotors gegenüber der idealen Drehachse begründet.

c) Motorpendel, Koordinate ϑ

Schließlich wollen wir noch die dritte Bewegungsgleichung für die Koordinate ϑ herleiten. Für das Moment des Motorpendels als Kreisel schreiben wir:

$$M = M_z + jM_y \quad (4.3)$$

Nach ähnlicher Behandlung wie beim Rotorkreisel erhalten wir:

$$M = \Theta_a \ddot{\vartheta} - j\Omega\Theta_p \dot{\vartheta} \quad (4.7)$$

Wir bilden den Momentensatz um das Kardanzentrum. Damit ergibt sich als Bewegungsgleichung in der Koordinate ϑ :

$$\overset{\curvearrowright}{\text{KZ:}} \quad \Theta_{aMP} \ddot{\vartheta} - j\Omega\Theta_{pMP} \dot{\vartheta} = \alpha_2 (\Theta_{aMP} - \Theta_{pMP}) \Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)} + M_b + (-j) \cdot Q \cdot L - F_c \cdot l_4 + M_D \quad (4.8)$$

Die Notwendigkeit der imaginären Einheit $(-j)$ vor dem Querkraftterm erläutern wir anhand von Bild 4.5.. Dort sind ein Biegemoment \vec{M}_b und eine Querkraft jeweils aus zwei positiven Komponenten M_{by} und M_{bz} bzw. Q_y und Q_z eingetragen. Die Querkraft erzeuge mit dem Vektor \vec{L} ein weiteres Moment \vec{M}_q nach

$$\vec{M}_q = \vec{Q} \times \vec{L} \quad (4.9).$$

Der Winkel zwischen \vec{Q} und \vec{L} betrage 90° . Also kann für den Betrag des Momentes \vec{M}_q geschrieben werden: $M_q = QL$. Wir fassen die Momente aus Biegemoment und Querkraft nach Koordinaten getrennt zusammen und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum M_{iz} &= Q_y L + M_{bz} \\ \sum M_{iy} &= -Q_z L + M_{by} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die komplexe Zusammenfassung $\sum M_i = \sum M_{iz} + j \sum M_{iy}$ ergibt:

$$\sum M_i = M_b - jQL \quad (4.11).$$

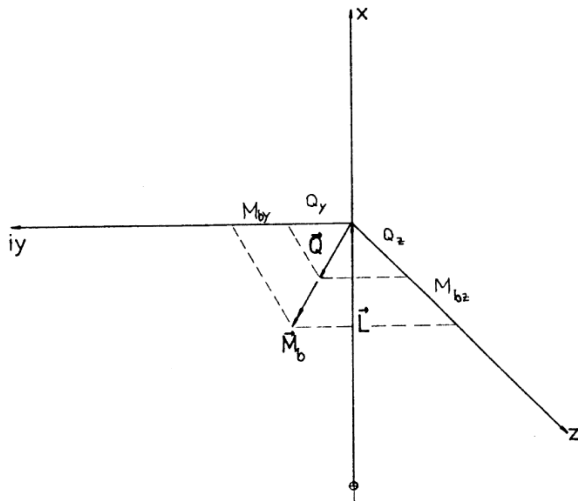


Abbildung 4.5.: Vorzeichen von Querkraft und Biegemoment

4.1.3.3 Ersetzen der allgemeinen Symbole

Bisher wurden nur die Bewegungsgleichungen aufgestellt, ohne die allgemeinen Symbole in ihnen näher zu bestimmen; dies wollen wir nun tun.

a) Steifigkeiten der elastischen Elemente

α) Wellensteifigkeiten

Zuerst behandeln wir Querkraft und Biegemoment der Welle. Wir stellen mit den Maxwell'schen Einflußzahlen den Zusammenhang her zwischen der Verformung der Welle (r, φ, ϑ) und der äußeren Belastung (Q, M_b). Das entstehende Gleichungssystem lösen wir nach Q und M_b auf, und setzen diese in die Bewegungsgleichungen ein, wodurch die Steifigkeiten der Welle eingeführt sind.

Die hier gewählte Art, die Wellensteifigkeiten in die Bewegungsgleichungen einzuführen ist inhaltlich identisch mit dem Aufstellen einer Nachgiebigkeitsmatrix und einer Invertierung derselben zur Steifigkeitsmatrix. Der direkte Weg zu den Wellensteifigkeiten über die Krafteinflußzahlen ist wegen eines Lastfalles, der nicht in den einschlägigen Tabellen z.B. [21] für Krafteinflußzahlen enthalten ist, kaum möglich.

Die drei Maxwellschen Einflußzahlen kann man in Worten so beschreiben:

α =Durchbiegung infolge einer positiven Einheitskraft, Einheit [m/N]

β =Neigung infolge einer positiven Einheitskraft = Durchbiegung infolge eines positiven Einheitsmomentes, Einheit [rad/N] bzw [m/Nm]

γ =Neigung infolge eines positiven Einheitsmomentes, Einheit [rad/Nm]

Daß die Einflußzahl β bei "Neigung infolge einer positiven Einheitskraft" und "Durchbiegung infolge eines positiven Einheitsmomentes" gleich ist, macht man sich leicht an den möglichen Einheiten der Einflußzahl klar.

Die Zusammenhänge zwischen Verformung und Belastung - wir ziehen dabei eine beliebige ausgelenkte Lage des Rotors wie in Abbildung 4.6. heran - werden nun angeschrieben. Alle Auslenkungen bzw. Verdrehungen in positive Koordinatenrichtungen tragen positive Vorzeichen, und umgekehrt. Auch Biegemoment und Querkraft, die wir in einem Schnittbild vorzeichenrichtig eingetragen haben zählen wir positiv, wenn sie in positive Koordinatenrichtungen weisen.

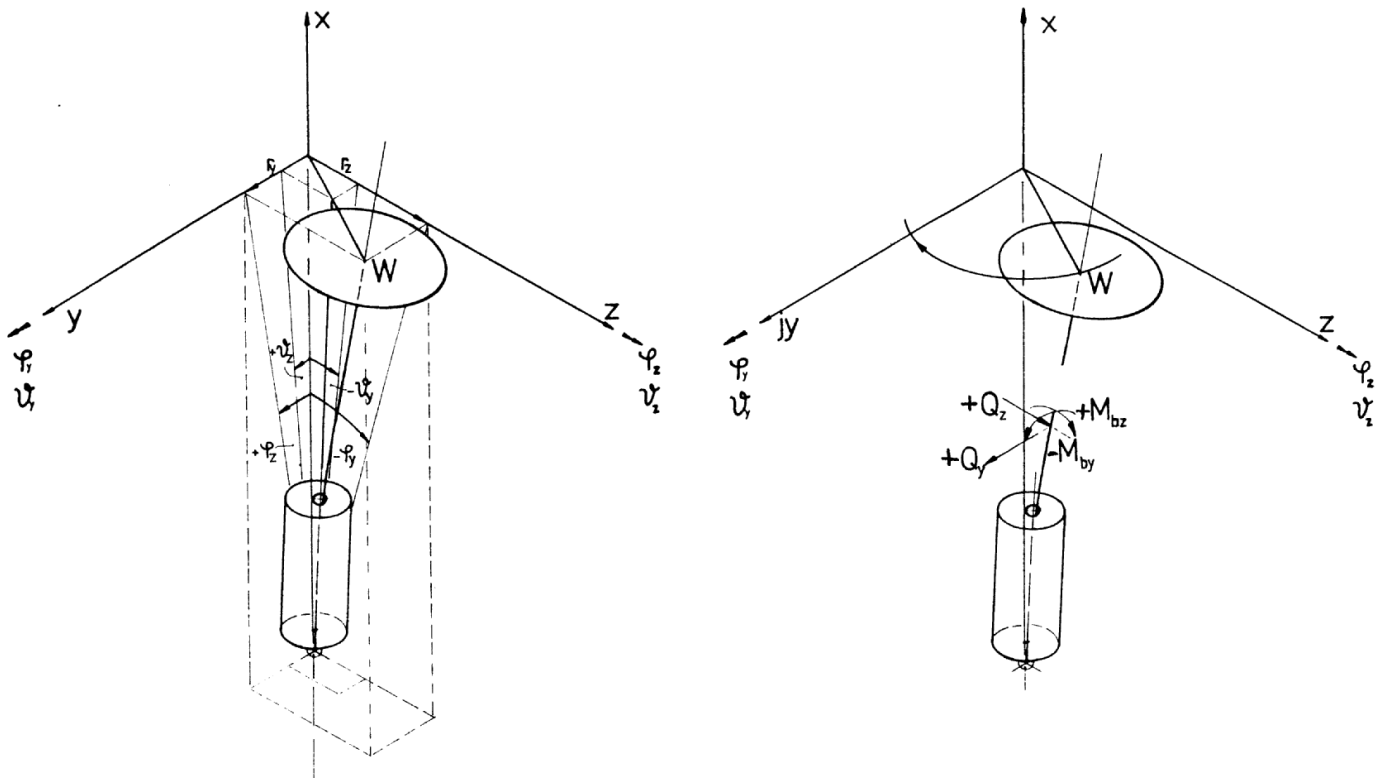


Abbildung 4.6.: Einführung der elastischen Konstanten der Welle: Vorzeichen von Auslenkung und Belastung.

Wenn wir so vorgehen erhalten wir für die *Durchbiegung* der Welle, unter Berücksichtigung, daß Wege in der Koordinate ϑ nichts zur Wellenverformung beitragen:

$$\begin{aligned} r_y - \vartheta_z L &= \alpha Q_y + \beta M_{bz} \\ r_z - (-\vartheta_y) L &= \alpha Q_z - \beta M_{by} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die komplexe Zusammenfassung ergibt

$$jr_y - j\vartheta_z L + r_z + \vartheta_y L = j\alpha Q_y + j\beta M_{bz} + \alpha Q_z - \beta M_{by} \quad (4.13)$$

und

$$(r - (+j)\vartheta L) = \alpha Q + (+j)\beta M_b \quad (4.14)$$

Für die *Neigung* der Welle ergibt sich analog folgende Differenz:

$$\begin{aligned} (-\varphi_y) - (-\vartheta_y) &= \beta Q_z - \gamma M_{by} \\ \varphi_z - \vartheta_z &= \beta Q_y + \gamma M_{bz} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Faßt man auch hier komplex zusammen, so erhält man die Gleichungen

$$j(\varphi_y - \vartheta_y) + \varphi_z - \vartheta_z = -j\beta Q_z + j\gamma M_{by} + Q_y + \gamma M_{bz} \quad (4.16)$$

und

$$(\varphi - \vartheta) = (-j)\beta Q + \gamma M_b \quad (4.17)$$

Auflösen des Gleichungssystems bestehend aus (5.14) und (5.15) nach Q und M_b liefert:

$$Q = \frac{(r - j\vartheta L)\gamma - (\varphi - \vartheta)j\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} \quad (4.18)$$

$$M_b = \frac{\alpha(\varphi - \vartheta) + j\beta(r - j\vartheta L)}{\alpha\gamma - \beta^2} \quad (4.19)$$

Nun haben wir die elastischen Konstanten α, β, γ explizit anzugeben. Wir beschränken uns dabei auf den Fall mit abgezogenem Fanglager. Die Biegung der Welle zwischen der zylindrischen Passung oben und dem Konus unten muß in die elastischen Konstanten eingearbeitet werden. Die Wellennachgiebigkeiten müssen also zusammengesetzt werden. Zu diesem Zweck gehen wir zunächst von elastischen Konstanten aus, die wir kennen, nämlich den Maxwell'schen Einflußzahlen für den Kragbalken. Letztere lauten:

$$\bar{\alpha} = \frac{l^3}{3EI}, \bar{\beta} = \frac{l^2}{2EI}, \bar{\gamma} = \frac{l}{EI} \quad (4.20)$$

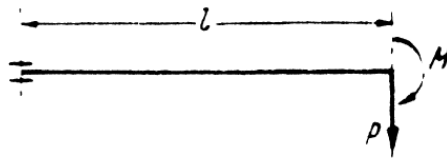


Abbildung 4.6. Maxwell'sche Einflußzahlen beim Kragbalken

Diese wenden wir auf die in Abbildung 4.7. gezeigten Wellenabmessungen an.

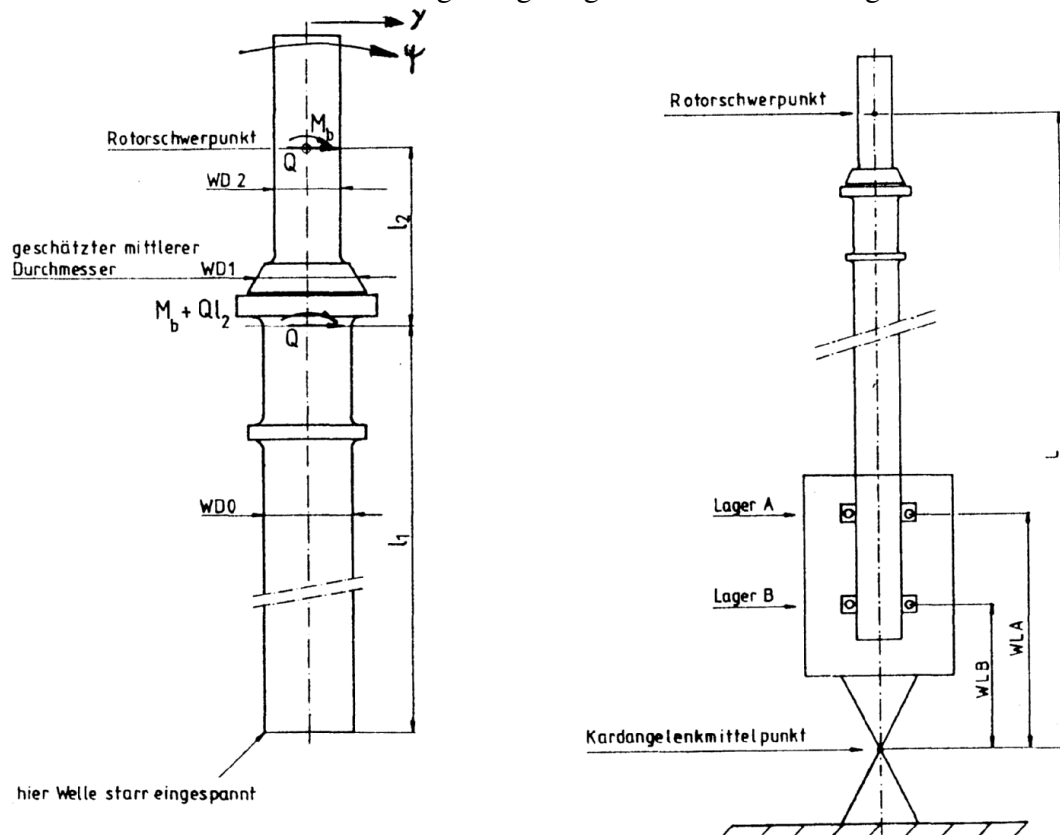


Abbildung 4.7.: Zur Bestimmung der elastischen Konstanten

Wir formulieren den Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung, und erhalten [7]:

$$y = Q\bar{\alpha} + (l_2 Q + M_b)\bar{\beta} + \psi l_2 \quad (4.21)$$

$$\psi = Q\bar{\beta} + (Ql_2 + M_b)\bar{\gamma} \quad (4.22)$$

Setzt man (4.22) in (4.21) ein, ergibt sich für y:

$$y = Q(\bar{\alpha} + 2l_2\bar{\beta} + l_2^2\bar{\gamma}) + M_b(\bar{\beta} + l_2\bar{\gamma}) \quad (4.23)$$

Die gesuchten elastischen Konstanten der Welle erhalten wir durch

$$\alpha = \frac{dy}{dQ} = \bar{\alpha} + 2l_2\bar{\beta} + l_2^2\bar{\gamma} = \frac{l_1^3}{3EI} + \frac{2l_2l_1}{2EI} + \frac{l_2^2l_1}{EI} \quad (4.24)$$

$$\beta = \frac{dy}{dM_b} = \frac{d\psi}{dQ} = \bar{\beta} + \bar{\gamma}l_2 = \frac{l_1^2}{2EI} + \frac{l_2l_1}{EI} \quad (4.25)$$

$$\gamma = \frac{d\psi}{dM_b} = \bar{\gamma} = \frac{l_1}{EI} \quad (4.26)$$

Wir verwenden nun folgende Abkürzungen:

$$k_{11} = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} = \frac{12EI}{l_1^3} \quad (4.27)$$

$$k_{12} (= k_{21}) = \frac{\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} = \frac{6EI}{l_1^3} (l_1 + 2l_2) \quad (4.28)$$

$$k_{22} = \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2} = \frac{4EI}{l_1^3} (l_1^2 + 3l_1l_2 + 3l_2^2) \quad (4.29)$$

Für die von der Welle ausgeübte Querkraft und das Biegemoment schreiben wir nunmehr:

$$\begin{aligned} Q &= k_{11}(r - j\vartheta L) - jk_{12}(\varphi - \vartheta) \\ M_b &= k_{22}(\varphi - \vartheta) - k_{12}(-jr - \vartheta L) \end{aligned} \quad (4.30)$$

β) Die Federkraft am Motorpendel ist:

$$F_c = c \cdot l_4 \cdot \vartheta \quad (4.31)$$

Damit ist die Berechnung der elastischen Elemente abgeschlossen.

b) Einführung der Dämpfung

In der Koordinate ϑ muß jetzt der Betrag und die Wirkungsrichtung des Dämpfungsmomentes relativ zur Lage der Trägheitsachse des Motorpendels geklärt werden. Zur Berechnung des Betrages des Dämpfungsmomentes gehen wir von geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung aus. Die Berechtigung dazu, sowie die Berechnungsgrundlage für die an dieser Maschine verwendete Dämpfungskammer ist [16] bzw. Arbeiten von R. Koehler [7] zu entnehmen. Wir wollen hier nur das Ergebnis der erwähnten Untersuchungen zitieren:

$$|M_D| = \vartheta \frac{\omega \cdot 3,40 \cdot \rho \cdot \nu (h \cdot a \cdot l_3)^2}{s^3} = \dot{\vartheta} \cdot C_d \quad (4.32)$$

Darin bedeuten ρ die Dichte und ν die kinematische Viskosität der Dämpfungsflüssigkeit, h die Spalthöhe, s die Spaltweite der Dämpfungskammer, l die Entfernung Kardanzentrum-Mitte Dämpfungskammer, a den inneren Spaltradius und ω die Schwingungsfrequenz des Systems.

Das Dämpfungsmoment muß nun vorzeichenrichtig in die Bewegungsgleichung eingepaßt werden. Dazu überlegen wir uns, daß die Richtung des Dämpfungsmomentes in jeder Komponente die gleiche Richtung hat, wie das Moment aus der Massenträgheit $\Theta_{aMP} \ddot{\vartheta}_y$ bzw. $\Theta_{aMP} \ddot{\vartheta}_z$ (vgl. Kap. 2, Gl. (2.11)), und somit das gleiche Vorzeichen tragen muß. Da in der Bewegungsgleichung das Moment aus der Massenträgheit "links" steht und das Dämpfungsmoment "rechts", schreiben wir:

$$M_D = -C_d \dot{\vartheta} \quad (4.33)$$

4.1.3.4. Bewegungsdifferentialgleichungen -Vollständige Bewegungsgleichungen des Rotor - Motorpendelsystems

Nun setzen wir die Kräfte und Momente in die Grundgleichungen ein, und formen danach jeweils um, bis die so erhaltenen Gleichungen nach Koordinatenrichtungen sortiert sind.

a) Rotor, Koordinate r

Für den Bahnradius des Rotorschwerpunktes ergibt sich:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} + k_{11}(r - j\vartheta L) - jk_{12}(\varphi - \vartheta) &= em\Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta)} + F_L \\ m\ddot{r} + k_{11}r - jk_{12}\varphi - j\vartheta(k_{11}L - k_{12}) &= em\Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta)} + F_L \end{aligned} \quad (4.34)$$

b) Rotor, Koordinate φ

Für die Koordinate φ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Theta_{aR}\ddot{\varphi} - \Theta_{pR}\Omega\dot{\varphi} + k_{22}(\varphi - \vartheta) - k_{12}(-jr - \vartheta L)j &= \alpha_1(\Theta_{aR} - \Theta_{pR})\Omega^2 e^{j(\Omega t + \gamma)} + M_L \\ \Theta_{aR}\ddot{\varphi} - \Theta_{pR}\Omega\dot{\varphi} + k_{22}\varphi + jk_{12}r + (Lk_{12} - k_{22})\vartheta &= \alpha_1(\Theta_{aR} - \Theta_{pR})\Omega^2 e^{j(\Omega t + \gamma)} + M_L \end{aligned} \quad (4.35)$$

c) Motorpendel, Koordinate ϑ

Und die Koordinate ϑ ergibt:

$$\begin{aligned} \Theta_{aMP}\ddot{\vartheta} - j\Omega\Theta_{pMP}\dot{\vartheta} - k_{22}\varphi - jk_{12}r - (Lk_{12} - k_{22})\vartheta - (-j)L(k_{11}r - jk_{12}\varphi - j\vartheta(k_{11}L - k_{12})) + c^*l_4^2\vartheta + C_d\dot{\vartheta} &= \alpha_2(\Theta_{aMP} - \Theta_{pMP})\Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)} \\ \Theta_{aMP}\ddot{\vartheta} - j\Omega\Theta_{pMP}\dot{\vartheta} + (Lk_{12} - k_{22})\varphi + jr(Lk_{11} - k_{12}) + \vartheta(L(k_{11}L - k_{12}) - (k_{12}L - k_{22})) + c^*l_4^2\vartheta + C_d\dot{\vartheta} &= \alpha_2(\Theta_{aMP} - \Theta_{pMP})\Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

d) Matrizenform

In der übersichtlichen Matrizenform erkennt man die Symmetrien des Gleichungssystems gut, und kann sich durch Vergleich mit teilweise ähnlichen Rechnungen von der Richtigkeit der Vorgehensweise überzeugen.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{aR} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{aMP} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j\Omega\Theta_{pR} & 0 \\ 0 & 0 & -j\Omega\Theta_{pMP} + C_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} k_{11} & -jk_{12} & -j(k_{11}L - k_{12}) \\ jk_{12} & k_{22} & Lk_{12} - k_{22} \\ j(k_{11}L - k_{12}) & Lk_{12} - k_{22} & k_{11}L^2 - 2k_{12}L + k_{22} + c \cdot l_4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} me \cdot e^{j\beta} \\ \alpha_1 (\Theta_{aR} - \Theta_{pR}) e^{j\gamma} \\ \alpha_2 (\Theta_{aMP} - \Theta_{pMP}) e^{j\phi} \end{bmatrix} \cdot \Omega^2 e^{j\Omega t} + \begin{bmatrix} F_L \\ M_L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix ist nicht symmetrisch, weil komplex zusammengefaßte Winkel - und Translationskoordinaten jeweils in einer Bewegungsgleichung nebeneinander verwendet werden.

4.1.4. Einführen der Kräfte aus der Flüssigkeitsfüllung

4.1.4.1. Übersicht

Wir wollen die resultierenden Kräfte der Flüssigkeitsfüllung auf den Rotorschwerpunkt ermitteln. Dazu haben wir uns zunächst zu überlegen, daß die Kraft F_L und das Moment M_L durch die Wellenbewegung in den zwei Flüssigkeitsringen entstehen. Der eine Flüssigkeitsring enthält nahezu reibungsfreie, der andere zähe Flüssigkeit.

Bei reibungsfreier Flüssigkeit ist die resultierende Kraft rein radial, bei zäher hat sie eine zusätzliche tangentielle Komponente. Die resultierende Kraft einer Ringwelle in zäher Flüssigkeit gibt *R. Koehler* [8] an.

Zu der resultierenden Kraft F_L gelangt er, indem die Navier - Stokesschen Gleichungen mit den Kontinuitätsbedingung und den zugehörigen Randbedingungen löst. Auf die Formel für die resultierende Kraft wollen wir hier zurückgreifen und zeigen, daß sie im Grenzfall verschwindender Flüssigkeitszähigkeit wieder auf die Formel von Wolf [19] führt.

4.1.4.2. Komponenten von F_L und M_L

Zunächst betrachten wir die Komponenten von F_L und M_L . Im Schnittbild (Abbildung 4.8.) ist die resultierende Kraft der reibungsfreien Flüssigkeit mit F_W , die der zähen Flüssigkeit mit $F_{\dot{O}}$ bezeichnet. Für beide werden wir im nächsten Abschnitt Formeln angeben. Weil die Schwerpunkte der Querschnittsflächen beider Flüssigkeitsringe und damit die Angriffspunkte der resultierenden Kräfte nicht in der Rotorschwerpunktsebene liegen, entsteht das Flüssigkeitsmoment M_L mit Komponenten analog denen von F_L . Der Abstand des oberen Flüssigkeitsringes von der Rotorschwerpunktsebene werde mit s_W , der des unteren Flüssigkeitsringes mit $s_{\dot{O}}$ bezeichnet. Verwenden wir die Vorzeichenfestlegung von Abbildung 4.4., so erhalten wir für die Kräfte und Momente aus der Flüssigkeitsfüllung:

$$\begin{aligned} F_L &= F_W + F_{\dot{O}} \\ M_L &= F_W s_W - F_{\dot{O}} s_{\dot{O}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

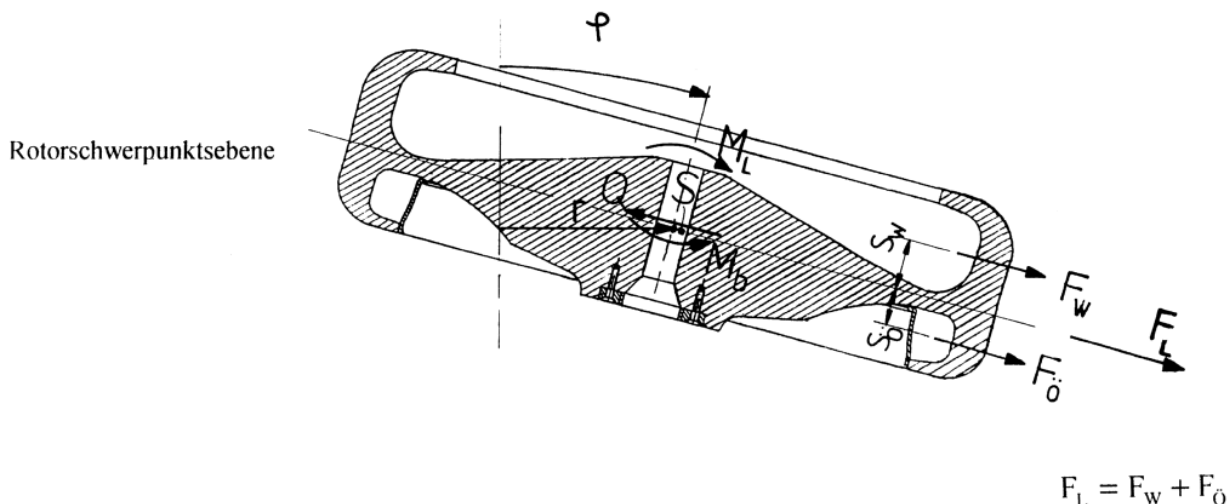


Abbildung 4.8.: Schnittbild resultierende Kräfte und Momente aus der Flüssigkeitsfüllung

4.1.4.3. Resultierende Kräfte F_W und $F_{\dot{O}}$

Nun haben wir die Terme für die resultierenden Kräfte F_W und $F_{\dot{O}}$ explizit anzugeben. Wir behandeln zunächst den Term für die resultierende Kraft aus zäher Flüssigkeit.

a) Voraussetzungen, Koordinatensystem, Grundgleichungen und Randbedingungen bei der Berechnung der resultierenden Kraft $F_{\ddot{o}}$

Voraussetzungen und Annahmen

- 1) Die Flüssigkeit wird als inkompressibel betrachtet
- 2) Oberflächeneffekte an der freien Oberfläche werden nicht berücksichtigt:
die Oberflächenspannung ist sehr klein gegenüber dem Druckgradienten.
- 3) Die Schwerkraft wird gegenüber der Zentrifugalkraft vernachlässigt, d.h. die Flüssigkeitsoberfläche ist im ungestörten Fall ein idealer Zylinder. Nach Kuipers [9] gilt dies für $R^2 \cdot \Omega^2 \gg 2 \cdot H \cdot g$. (Radius R bis zur Oberfläche des Flüssigkeitsrings; halbe Höhe des Flüssigkeitsrings H)
- 4) Es wird nur die Grundschiwingung der Ringwelle betrachtet, da die Wellenbewegungen der höheren Eigenfrequenzen des Flüssigkeitsrings rotations-symmetrisch bezüglich der idealen Drehachse sind und zur resultierenden Kraft nichts beitragen

Koordinatensystem

Zur Beschreibung der Flüssigkeitsbewegung wurde ein rotorfestes, mit der Winkelgeschwindigkeit Ω des Rotors drehendes Zylinderkoordinatensystem gewählt (r', φ', z') , wie es Abbildung 4.9. zeigt.

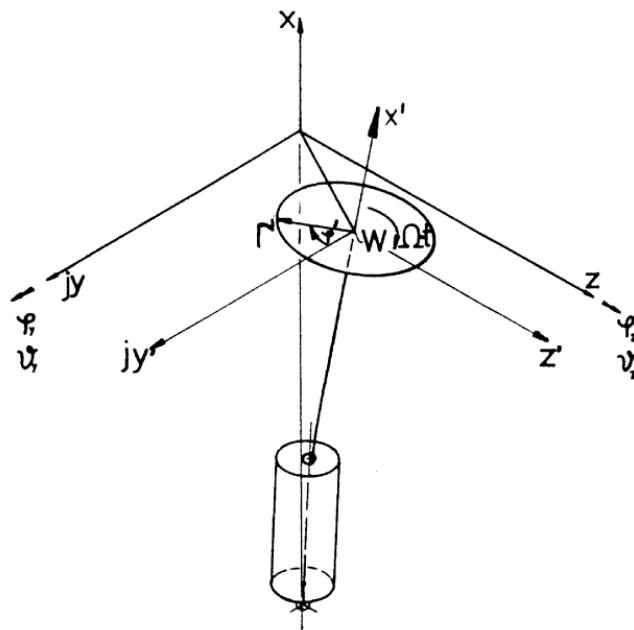


Abbildung 4.9.: Polarkoordinatensystem für die Flüssigkeitsbewegung

Gleichungen und Randbedingungen

Der Gleichungssatz zur Beschreibung der Flüssigkeitsbewegung sind die Navier - Stokes - Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung in rotorfesten Polarkoordinaten. Die Randbedingungen ergeben sich aus dem Haften der zähen Flüssigkeit an Außenwand, Deckel und Boden.

b) Zur Lösung des Randwertproblems

Das Gleichungssystem mit Randbedingungen ist ein Randwertproblem, dessen Lösung *R. Koehler* angibt. Für die Wellenbewegung können kleine Amplituden angenommen werden; deshalb ist es möglich, die konvektiven Glieder in den Navier - Stokes - Gleichungen zu linearisieren. Es werden nur die ebenen Wellenbewegungen betrachtet nicht die Kippwellen als Reaktion auf eine Neigung φ des Rotors.

c) Ergebnis resultierende Kraft für zähe Flüssigkeit - $F_{\ddot{O}}$

Man erhält schließlich als Ergebnis einer langwierigen Rechnung mit einer doppelten Reihenentwicklung:

$$F_{\ddot{O}} = m_{\ddot{O}} r (1 + \sigma)^2 \left(1 + \sum_{N=1}^{\infty} F_N \right) \quad (4.39)$$

Der dimensionslose Ausdruck $(1 + \sigma) = \frac{\omega}{\Omega}$ stellt den Zusammenhang her zwischen der Rotordrehzahl Ω und der Absolutwinkelgeschwindigkeit ω in raumfesten Koordinaten der Wasserringwelle her. Somit ist σ die dimensionslose Ringwellengeschwindigkeit bezüglich des Rotors.

Die effektive Flüssigkeitsmasse ist:

$$m_{\ddot{O}} = \rho \pi R_2^2 (2H_2). \quad (4.40)$$

Der Füllparameter lautet:

$$f = \frac{R_2 - T_2}{R_2}, \quad (4.41)$$

Dabei ist $f = 1$ wenn der Rotor leer ist und $f = 0,8$, wenn die Flüssigkeitstiefe $T_2 = 0,2 R_2$ ist, siehe Abbildung 4.1..

Die Reynoldszahl wird nach

$$\text{Re} = \frac{\Omega \left(\frac{H_2}{\pi} \right)^2}{\nu} \quad (4.42)$$

gebildet. Für F_N gilt schließlich:

$$F_N = \left(-2 \left(\frac{f}{\pi} \right)^2 \right) \cdot \frac{A_3}{A_1 (A_3 + B \cdot A_4)} \quad (4.43)$$

Es bedeuten in (4.43) weiterhin:

$$A_1 = (N - 0,5)^2 \quad (4.44)$$

$$A_3 = \left[1 + DEM (F_{\ddot{O}11} + F_{\ddot{O}13} \cdot DE^2) + DE^2 (F_{\ddot{O}12} + F_{\ddot{O}14} DE^2) \right] \quad (4.45)$$

$$A_4 = \left[F_{\ddot{O}4} + DEM \cdot (F_{\ddot{O}21} + F_{\ddot{O}23} \cdot DE^2) + DE^2 \cdot (F_{\ddot{O}22} + EF + F_{\ddot{O}24} DE^2) \right] \quad (4.46)$$

$$B = 1 + \frac{(1 + 2\sigma) j\sigma \cdot \text{Re}}{\sigma^2 \left[(N - 0,5)^2 + j\sigma \cdot \text{Re} \right]} \quad (4.47)$$

Wir erklären noch DEM, DE, EF in (4.44) bis (4.47)

$$DEM = DE \cdot EM \quad (4.48)$$

$$DE = \frac{1}{F_{\ddot{O}8} \sqrt{A_2}} \quad (4.49)$$

$$EM = \frac{e^{\alpha(1-f)} - e^{-\alpha(1-f)}}{e^{\alpha(1-f)} + e^{-\alpha(1-f)}}, \quad (4.50)$$

wobei $\alpha = F_{\ddot{O}8} \sqrt{A_2}$ ist.

Schließlich gilt:

$$EF = F_{\ddot{O}32} \cdot \frac{1}{e^{\alpha(1-f)} + e^{-\alpha(1-f)}} \quad (4.51)$$

Die einzelnen Konstanten geben wir folgendermaßen an:

$$F_{\ddot{o}4} = \frac{1}{2}(f^2 - 1) \quad (4.52)$$

$$F_{\ddot{o}8} = \pi \frac{R_2}{H_2} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} F_{\ddot{o}11} &= (19/f - 15)/8 \\ F_{\ddot{o}12} &= ((465/f - 570)/f * 105)/128 \\ F_{\ddot{o}13} &= (((1785/f - 6875)/f + 1995)/f + 315)/1024 \\ F_{\ddot{o}14} &= ((((-24885/f - 107100)/+97650)/+23940)/f + 10395)/32760 \end{aligned} \quad (4.54 \text{ a - d})$$

$$\begin{aligned} F_{\ddot{o}21} &= F_{\ddot{o}4} \cdot F_{\ddot{o}11} + f^2 \\ F_{\ddot{o}22} &= F_{\ddot{o}04} \cdot F_{\ddot{o}12} * ((-3f + 19)f + 16/f^2)/8 \\ F_{\ddot{o}23} &= F_{\ddot{o}4} \cdot F_{\ddot{o}13} + ((-15f - 114)f + 465 + (96/f - 480)/f^2)/128 \\ F_{\ddot{o}24} &= F_{\ddot{o}4} \cdot F_{\ddot{o}13} + ((-105f - 285)f - 1395 + (((-240/f - 1440)/f + 1680)/f + 1758)/f)/1024 \end{aligned} \quad (4.55 \text{ a - d})$$

$$F_{\ddot{o}32} = -8/f^2 \quad (4.56)$$

d) Grenzübergang zu reibungsfreier Flüssigkeit - F_W

Im letzten Teil dieses Kapitels führen wir den Grenzübergang der resultierenden Kraft für verschwindende Zähigkeit durch, und erhalten eine Formel für die resultierende Kraft bei reibungsfreier Flüssigkeitsfüllung, welche mit der von Wolf angegebenen übereinstimmt.

Dazu ziehen wir zunächst die Reihensumme

$$\sum_{N=1}^{\infty} F_N = \sum_{N=1}^{\infty} \left(-2 \left(\frac{f}{\pi} \right)^2 \right) \cdot \frac{A_3}{A_1(A_3 + B \cdot A_4)} \text{ aus (4.39) heran.}$$

Für verschwindende Flüssigkeitszähigkeit ($\nu \rightarrow 0, \text{Re} \rightarrow \infty$) sind die einzelnen Terme des Bruchstriches:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (N - 0,5)^2 \\
A_3 &= 1 \\
A_4 &= F_{\dot{\sigma}4} \\
B &= 1 + \frac{1 + 2\sigma}{\sigma^2}
\end{aligned} \tag{4.57 a -d}$$

Setzt man dies in die Reihensumme ein, und zieht gleichzeitig die Glieder, die von N unabhängig sind, vor das Summenzeichen, so erhält man:

$$\sum_{N=1}^{\infty} F_N = -2 \left(\frac{f}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + F_{\dot{\sigma}4} \cdot \left(1 + \frac{1+2\sigma}{\sigma^2} \right)} \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(N - 0,5)^2} \tag{4.58}$$

Nun machen wir von der Identität

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(N - 0,5)^2} = \frac{\pi^2}{2} \tag{4.59}$$

Gebrauch, die man nach kleinen Umformungen aus [2] angeben kann.

Somit erhalten wir für die Reihensumme:

$$\sum_{N=1}^{\infty} F_N = - \frac{f^2}{1 + F_{\dot{\sigma}4} \left(1 + \frac{1+2\sigma}{\sigma^2} \right)} = - \frac{f^2 \sigma^2}{\sigma^2 + \frac{1}{2} (f^2 - 1) (\sigma + 1)^2} \tag{4.60}$$

Für die resultierende Kraft im Grenzfall der reibungsfreien Flüssigkeit erhalten wir jetzt:

$$F_{\dot{\sigma}} \Big|_{v=0} = m_{\dot{\sigma}} r (1 + \sigma)^2 \left(1 - \frac{2 f^2 \sigma^2}{\sigma^2 + f^2 (\sigma^2 + 1) - 2 \sigma - 1} \right) \tag{4.61}$$

Es fehlt noch der unmittelbare Vergleich zur Wolf'schen Formel. Diesen wollen wir jetzt erreichen. Wolf verwendet die Größe $\sigma = \omega - \Omega$ nicht dimensionslos, wie dies oben geschehen ist und er benutzt einen anderen Füllparameter. Zwischen dem hier verwendeten und dem Wolf'schen Füllparameter besteht die Beziehung:

$$\gamma = \frac{1+f^2}{1-f^2}. \quad (4.62)$$

Führt man in (4.61) zunächst die dimensionsbehaftete Größe $\sigma = \omega - \Omega$ ein, so ergibt sich:

$$F_{\ddot{O}} \Big|_{v=0} = m_{\ddot{O}} r \omega^2 \left(1 + \frac{-2f^2 \sigma^2}{\sigma^2 + f^2 \sigma^2 - 2\sigma\Omega + f^2 2\sigma\Omega - \Omega^2 + f^2 \Omega^2} \right) \quad (4.63)$$

und weiter

$$F_{\ddot{O}} \Big|_{v=0} = m_{\ddot{O}} r \omega^2 \left(1 + \frac{-(1+f^2)\sigma^2 + (1-f^2)\Omega^2}{\sigma^2(f^2+1) - (2\sigma\Omega + -\Omega^2)(1-f^2)} \right) \quad (4.64)$$

Nach Division durch $(1-f^2)$, Einführen von $\gamma = \frac{1+f^2}{1-f^2}$ und Zusammenfassen ergibt sich:

$$F_{\ddot{O}} \Big|_{v=0} = m_{\ddot{O}} r \omega^2 \left(\frac{\sigma^2 - 2\sigma\Omega - \Omega^2}{\gamma\sigma^2 - 2\sigma\Omega - \Omega^2} \right) = F_W \quad (4.65)$$

Dieser Ausdruck ist der Term für die resultierende Kraft aus einer Ringwelle in reibungsfreier Flüssigkeit und identisch mit dem von Wolf hergeleiteten Term.

4.1.4.4. Bewegungsgleichungen Rotor - Motorpendelsystem mit Flüssigkeitsfüllung

Zusammenfassend schreiben wir die Kräfte F_W und $F_{\ddot{O}}$ nochmals an. Sie lauten mit der dimensionslosen Eigenfrequenz $(1+\sigma)$ der Ringwelle:

$$F_W = m_W r_1 (1+\sigma)^2 \left(\frac{\sigma^2 - f^2 \sigma^2 + f^2 - 2\sigma - 1}{\sigma^2 + f^2 (\sigma^2 + 1) - 2\sigma - 1} \right) \quad (4.65)$$

$$F_{\ddot{O}} \approx m_{\ddot{O}} r_2 (1+\sigma)^2 \left(1 + \sum_{N=1}^{35} F_N \right) \quad (4.39)$$

Bei den numerischen Berechnungen wurde für die resultierende Kraft des oberen nahezu reibungsfreien Flüssigkeitsringes die einfache Formel von Wolf verwendet, mit der man auf der "sicheren Seite" liegt. Deshalb haben wir zu beachten, daß sich der Füllparameter in Gl. (4.65) aus den Daten des oberen Flüssigkeitsringes (R_1 , H_1 , T_1) berechnet.

Die Fourierentwicklung in Gl. (4.39) wird nach 35 Termen abgebrochen.

Mit r_1 bzw. r_2 werde der Abstand des des geometrischen Mittelpunktes des jeweiligen Flüssigkeitsringes von der idealen Drehachse bezeichnet. Die Symbole M_W und $M_{\ddot{O}}$ stehen für komplexe Funktionen mit Betrag und Phase, die die Massenwirkung der Flüssigkeitsringe in Abhängigkeit der Eigenfrequenz der Ringwellen wiedergeben. Für F_W und $F_{\ddot{O}}$ schreiben wir jetzt abkürzend:

$$\begin{aligned} F_W &= r_1 M_W \\ F_{\ddot{O}} &= r_2 M_{\ddot{O}} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Wir ersetzen jetzt r_1 und r_2 und schreiben:

$$\begin{aligned} r_1 &= (r + s_W \varphi) \\ r_2 &= (r - s_{\ddot{O}} \varphi) \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} F_L &= F_W + F_{\ddot{O}} = M_W (r + s_W \varphi) + M_{\ddot{O}} (r - s_{\ddot{O}} \varphi) \\ M_L &= F_W s_W - F_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}} = M_W (r + s_W \varphi) s_W - M_{\ddot{O}} (r - s_{\ddot{O}} \varphi) s_{\ddot{O}} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{aR} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{aMP} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j\Omega\Theta_{pMP} & 0 \\ 0 & 0 & -j\Omega\Theta_{pMP} + C_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & -jk_{12} & -j(k_{11}L - k_{12}) \\ jk_{12} & k_{22} & Lk_{12} - k_{22} \\ j(k_{11}L - k_{12}) & Lk_{12} - k_{22} & k_{11}L^2 - 2k_{12}L + k_{22} + c * l_4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} (M_{\ddot{O}} + M_W) & (M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}) & 0 \\ (M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}) & (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_R e \cdot e^{j\beta} \\ \alpha_1 (\Theta_{aR} - \Theta_{pR}) \cdot e^{j\gamma} \\ \alpha_2 (\Theta_{aMP} - \Theta_{pMP}) \cdot e^{j\phi} \end{bmatrix} \cdot \Omega^2 e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (4.72)$$

4.1.5. Charakteristisches Polynom

Um das charakteristische Polynom zu erhalten, aus dem man die komplexen Eigenwerte des Rotorsystems bestimmen kann, ziehen wir die linke Seite der Bewegungsgleichung (4.73) heran. Wir machen für die Bewegungen in den einzelnen Koordinaten die Ansätze

$$r = r_0 \cdot e^{\lambda t}, \varphi = \varphi_0 \cdot e^{\lambda t}, \vartheta = \vartheta_0 \cdot e^{\lambda t}, \quad (4.73)$$

wobei $\lambda = \delta + j\omega$ ist. Das ergibt folgende Koeffizientendeterminante von r , φ und ϑ .

$$\begin{vmatrix} m_R \lambda^2 + c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}}) & -jc_{12} - (M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}) & -jc_{13} \\ jc_{12} - (M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}) & \Theta_{aR} \lambda^2 - j\Omega \lambda \Theta_{pR} + c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2) & c_{23} \\ jc_{31} & c_{32} & \Theta_{aMP} \lambda^2 + \lambda(C_d - j\Omega \Theta_{pMP}) + c_{33} + c^* l_4^2 \end{vmatrix} \quad (4.74)$$

Dabei haben wir folgende Vereinfachung verwendet:

$$\begin{aligned} c_{11} &= k_{11}; \quad c_{12} = k_{12}; \quad c_{13} = k_{11}L - k_{12} \\ c_{21} &= k_{12}; \quad c_{22} = k_{22}; \quad c_{23} = Lk_{12} - k_{22} \\ c_{31} &= k_{11}L - k_{12}; \quad c_{32} = Lk_{12} - k_{22}; \quad c_{33} = k_{11}L^2 - 2Lk_{12} - k_{22} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Die Ausrechnung der Koeffizientendeterminante ergibt das charakteristische Polynom, das an den Eigenwerten λ_i gleich null sein muß:

$$\begin{aligned} &\lambda^6 (m \Theta_{aR} \Theta_{aMP}) \\ &\lambda^5 (C_d m_R \Theta_{aR} - j\Omega m_R (\Theta_{aR} \Theta_{aMP} + \Theta_{aMP} \Theta_{pR})) + \\ &\lambda^4 (m_R \Theta_{aR} (c_{33} + c^* l_4^2) + \Theta_{aMP} ((c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}})) \Theta_{aR} + \\ &+ (c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2)) m_R) - \Omega^2 m_R \Theta_{pR} \Theta_{pMP} - j\Omega m_R \Theta_{pR} C_d) + \\ &\lambda^3 (C_d ((c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}})) \Theta_{aR} + (c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2)) m_R) - \\ &j\Omega ((c_{33} m_R + c^* l_4^2 m_R + (c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}})) \Theta_{aMP}) \Theta_{pR} + (c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2)) m_R \Theta_{pMP})) + \\ &\lambda^2 (((c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}})) \Theta_{aR} + (c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2)) m_R) (c_{33} + c^* l_4^2) - c_{23} c_{32} m_R - c_{13} c_{31} \Theta_{aR} - c_{12}^2 \Theta_{aMP} \\ &- \Omega^2 (c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}})) \Theta_{pR} \Theta_{pMP} + (M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}})^2 \Theta_{aMP} - j\Omega (c_{11} - (M_W - M_{\ddot{O}})) \Theta_{pR} C_d) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda^1 (C_d ((c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}}))(c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2)) + c_{12}^2 + (M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}})^2) \\
& - j\Omega((c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}}))(c_{33} + c_{11}c^*l_4^2)\Theta_{pR} - \Theta_{pR}c_{13}c_{31} + \\
& ((c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}}))(c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2)) + c_{12}^2)\Theta_{pMP} + (M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}})^2\Theta_{pMP})) + \\
& \lambda^0 ((c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}}))(c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2)) + c_{12}^2)(c_{33} + c^*l_4^2) \\
& + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{12}c_{13}c_{32} - (c_{11} - (M_W + M_{\ddot{O}}))c_{23}c_{32} - c_{13}c_{31}(c_{22} - (M_W s_W^2 + M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}}^2)) \quad (4.76) \\
& + (M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}})^2 c_{33}c^*l_4^2 - j(M_W s_W - M_{\ddot{O}} s_{\ddot{O}})(c_{23}c_{31} - c_{13}c_{32})) = 0
\end{aligned}$$

Grenzfall des charakteristischen Polynoms

Läßt man im charakteristischen Polynom bei Rotor ohne Flüssigkeitsfüllung ($M_W = M_{\ddot{O}} = 0$) (4.76) $\Omega \rightarrow \infty$ gehen, nachdem man zuvor Ω^2 dividiert hat, so ergibt sich die einfache Gleichung

$$m_R \lambda^2 + c_{11} = 0, \quad (4.77)$$

deren Lösungen die komplexen Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm j \sqrt{\frac{c_{11}}{m_R}}$ sind.

Dies Ergebnis für die Eigenwerte ist sinnvoll. Denn bei unendlich hoher Drehzahl kann sich der Rotorkreisel nicht verkippen, und das Motorpendel sich nicht um die Achsen des Kardangelenkes drehen. Die Eigenfrequenz bestimmt sich deshalb so, als sei nur eine reine Querbewegung des Rotors möglich.

4.1.6. Zur Lösung des charakteristischen Polynoms

Die komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms (4.76) sind die Eigenwerte des Rotorsystems mit zwei Flüssigkeitsringen. Diese Nullstellen werden durch iterative Approximation mit der Regula falsi bestimmt. Dazu hat man zunächst von einem Schätzwert λ_0 des Eigenwertes λ auszugehen. Dann nimmt man einen zweiten Wert λ_1 nahe an λ an: $\lambda_1 = \lambda_0(1 + R_f)$. Dabei ist R_f ein geforderter relativer Fehler (z.B. $5 \cdot 10^{-5}$). Die Anwendung der Regula falsi auf den Schätzwert und den zweiten angenommenen Wert ergibt den nächsten Wert λ_2 der Iteration:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - f(\lambda_1) \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{f(\lambda_1) - f(\lambda_0)} \quad (4.78)$$

In allgemeiner Form lautet die Regula falsi:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - f(\lambda_i) \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{f(\lambda_{i+2}) - f(\lambda_i)} \quad (4.79)$$

Charakteristisches Polynom, Regula falsi und geeignete Schätzwerte sind die Grundbausteine der numerischen Berechnung der Eigenwerte λ_i für das Fortran - Programm, mit dem die Stabilitätsrechnungen für diese Arbeit durchgeführt wurden.

Schätzwerte λ_0

Das betrachtete Rotorsystem besteht aus drei schwingungsfähigen Systemen, die miteinander in Wechselwirkung treten können. Es sind dies der Rotorkreisel, das Motorpendel und die Flüssigkeitsringe. Zur Bereitstellung der Schätzwerte behandeln wir das elastisch gekoppelte Zweimassensystem aus Rotorkreisel und Motorpendel als zwei Massen ohne Koppelung.

System 1: Rotorkreisel

Für den Rotorkreisel entnehmen wir die Schätzwerte aus dem vereinfachten charakteristischen Polynom [3]:

$$1) \text{ Biegeschwingung: } \sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{m_R c_{22}}} < \omega < \sqrt{\frac{c_{11}}{m_R}}$$

$$2) \text{ Präzession: } \omega = \frac{\Theta_{pR}}{2\Theta_{aR}} \Omega \pm \sqrt{\left(\frac{\Theta_{pR}}{2\Theta_{aR}}\right)^2 + \frac{c_{22}}{\Theta_{aR}}}$$

System 2: Motorpendel

Wir betrachten nun das Motorpendel separat. Seine Bewegung wird durch die Bewegungsgleichung

$$\Theta_{aMP} \ddot{\vartheta} - j\Omega \Theta_{pMP} \dot{\vartheta} + C_d \dot{\vartheta} + c * l_4^2 \vartheta = 0 \quad (4.80)$$

beschrieben. Mit dem Lösungsansatz $\vartheta = \vartheta_0 e^{\lambda t}$, wobei λ wieder die komplexe Eigenfrequenz ist, erhält man:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{C_d - j\Omega\Theta_{pMP}}{2\Theta_{aMP}} \pm j\sqrt{-\frac{(C_d - j\Omega\Theta_{pMP})^2}{4\Theta_{aMP}^2} + \frac{c^* l_4^2}{\Theta_{aMP}}} \quad (4.81)$$

Bei diesem Rotorsystem ist der gyroskopische Einfluß $-j\Omega\Theta_{pMP}$ gegenüber dem Einfluß des Dämpfungsmomentes C_d für alle praktisch vorkommenden Drehzahlen vernachlässigbar, wie man an den Daten des Versuchsstandes auf S. 75 erkennt. Deshalb kann man vereinfachend schreiben:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{C_d}{2\Theta_{aMP}} \pm j\sqrt{-\frac{C_d^2}{4\Theta_{aMP}^2} + \frac{c^* l_4^2}{\Theta_{aMP}}} \quad (4.82)$$

Mit den Werten für C_d und Θ_{aMP} ergibt sich der große Dämpfungsexponent von $\delta = -1625 / s$.

Beide Eigenfrequenzen sind offensichtlich sehr stark gedämpft.

System 3: Flüssigkeitsringe

Näherungslösungen für die Eigenfrequenzen der Flüssigkeitsringe kann die von Lichtenberg [11] angegebene Gleichung $\omega = \Omega + \text{Im}(\sigma)$ liefern. Die auf den ruhenden Beobachter bezogene Eigenfrequenz eines Flüssigkeitsringes ist ω , die Rotordrehzahl Ω . Die Größe σ ist die Eigenfrequenz eines Flüssigkeitsringes im rotorfesten Koordinatensystem und durch $\tau = \frac{\sigma}{j\Omega} - 1$ erklärt, die Variable τ wiederum durch

$$\tau_{01,02} = \frac{-2f^2 \pm \sqrt{2(1-f^2)}}{1+f^2} \quad (4.83)$$

In (4.82) bezeichnet f den in dieser Arbeit verwendeten Füllparameter (siehe 4.47 auf S. 56). Diese Werte können gut als Schätzwerte für die PC - Berechnungen der Eigenwerte mittels der charakteristischen Gleichung verwendet werden.

5. Experimenteller Teil

5.1 Versuchsaufbau

5.1. 1. Versuchsstand

5.1.1.1. Rotor

Der für die Experimente verwendete Versuchsrotor ist aus Aluminium gefertigt; sein Durchmesser beträgt 372 mm, seine Höhe 112,15 mm. Die zwei Flüssigkeitsringe haben eine Höhe von $2H_1 = 51$ mm (oberer Ring) und $2H_2 = 35,8$ mm (unterer Ring) und eine Tiefe von $T_1 = 28$ mm bzw. $T_2 = 35,5$ mm. Um ein Auslaufen des Dämpfungsöls aus der unteren Kammer im Stillstand zu verhindern, trägt der Rotor einen Ölingdeckel. Dieser hat an seinem oberen Ende zwei Öffnungen von ca. 2 mm Breite, um das Dämpfungsöl über Schläuche einfüllen zu können. Zwischen dem Rotor und der Oberkante des Ölingdeckels ist ein Spalt von etwa 0,15 mm Breite, durch welche die Luft in der Flüssigkeitskammer beim Befüllen des Rotors entweicht. Die Wellenbohrung des Rotors hat einen Durchmesser von 18 mm. Alle übrigen Rotormaße sind der Abbildung im Anhang zu entnehmen. Die Rotorwelle treibt den Rotor über eine am Rotor angeschraubte Mitnehmerscheibe mit 19 Zähnen (Abbildung 1.1. (7)) an. Der 60° Konus am oberen Ende der Rotorwelle nimmt das Eigengewicht des Rotors auf.

5.1.1.2. Rotorwelle, Fanglager, Motorwelle und Dämpfungskammer

Die Rotorwelle trägt unter dem oben erwähnten 60° - Konus und der Mitnehmerverzahnung den starr mit der Welle verbundenen Fanglagerkonus. Gegen diesen wird von unten her ein Pendelkugellager mit konischem Innenring gedrückt. Diese Vorrichtung heißt Fanglager; es kann hydraulisch zwischen der beschriebenen oberen Stellung, in der es die Rotorwelle versteift, und einer unteren Stellung, in der die Rotorwelle freigegeben wird, hin - und hergeschoben werden. Die hydraulischen Zuleitungen des Fanglagers sind die Bohrungen (6) in Abbildung 1.1.. An ihrem unteren Ende ist die Rotorwelle in die Motorwelle eingepreßt und hat in ihrem mittleren, freien Teil den Durchmesser 20 mm. Es hat sich als günstig erwiesen, die Motorwelle hohl auszuführen, sodaß die Preßpassung zur Rotorwelle möglichst weit unten sitzt, und die Rotorwelle eine größere Länge bekommt.

Die Käfigläufer des Drehstrom - Asynchronmotors sitzt auf der Motorwelle. Diese ist durch Gleitlager (Abbildung 1. 1 , (12)) im Motorgehäuse gelagert. Die Lager der Motorwelle wer-

den durch einen separaten Ölkreislauf geschmiert; die Ölleitungen zu den Lagern im Motorgehäuse sind in Abbildung 1.1. mit (16) bezeichnet. Das Motorgehäuse ist über ein Kardangelenk (Abbildung 1.1. (14)) unterhalb seiner Bodenplatte um Horizontalachsen aller Richtungen drehbeweglich, aber gegen Drehung um die Vertikale gesichert. Ein Kreuz von vier Federn und Justierschrauben dient dazu, die Motor und Rotorwelle genau vertikal auszurichten. Eine Dämpfungskammer (Abbildung 1.1. (8)) wirkt parallel zu dem Federkreuz. Sie besteht aus einer Zarge, die fest mit dem Maschinengestell verbunden ist, und einer Nut im Motorpendel, die mit hochviskosem Silikondämpfungsöl ($\rho = 0,970 \text{ g/cm}^3$ $\nu = 12125 \text{ mm}^2/\text{s}$) gefüllt ist. Die Zarge ragt auf einer Länge von maximal 31 mm in die Nut. Der Außendurchmesser der Zarge beträgt 136,70 mm, ihr Innendurchmesser 123,26 mm. Die Nut hat einen Außendurchmesser von 140,00 mm, und einen Innendurchmesser von 120,00 mm.

Das Maschinengestell ist eine Schweißkonstruktion aus Flachstahl, bzw. L - Profilen und mit einem Betonfundament im Boden verschraubt. Die Eigenfrequenzen des Maschinengestells werden durch Rechteckplatten, die auf zwei Seiten des Gestells mit den L - Träger verschraubt sind, auf die geeignete Höhe gebracht und in ihrer Amplitude vermindert. Das Maschinengestell ist in einer Abbildung im Anhang ohne die Versteifungsplatten gezeigt.

5. 1.1 .3. Auffangring

Will man die Instabilitätsgrenzen des Versuchsrotors ermitteln, muß man große Schwingungsamplituden des Rotors bis zu 2 mm zulassen. Größere Amplituden müssen aber, um Beschädigungen an Welle und Lagern der Maschine zu vermeiden, eingeschränkt werden. Dazu wurde ein Auffangring (in Abbildung 1.1. nicht gezeichnet), der in seinen Abmessungen an den Versuchsrotor angepaßt ist, am Versuchsstand vorgesehen. Wir wollen die Teile des Auffangringes anhand von Abbildung 5.1. beschreiben. Der obere Teil des Auffangringes mit einem Innendurchmesser von 191,5 besteht aus zwei konzentrischen Edelstahlringen (1), in die in 90° Stellung vier Buchsen (2) mit Innengewinden eingepaßt sind. Der innere Edelstahlring ist auf seiner Innenseite vollständig mit Filz ausgekleidet. In die Buchsen werden die Wegmeßsonden (3) eingeschraubt, die die Rotortranslationsbewegung erfassen. Der untere Teil des Auffangringes ist ein Ring aus Polyethylenmaterial (4) mit einer 45° Schräge an der Innenseite. Er soll die Amplituden der Rotortranslationsbewegung begrenzen. Eine Verstrebung (5) über dem oberen Teil des Auffangringes besteht aus zwei rechtwinklig verschraubten Stahlriegeln. Durch vier Kunststoffplatten an dieser Verstrebung (6) - an jedem Ende eines Riegels befindet sich eine - werden die Kippamplituden des Rotors begrenzt. Die zwei Wegmeßsonden (7), welche die Kippbewegung des Rotors erfassen, sind an der Verstrebung im Bereich der Kunststoffplatten verschraubt.

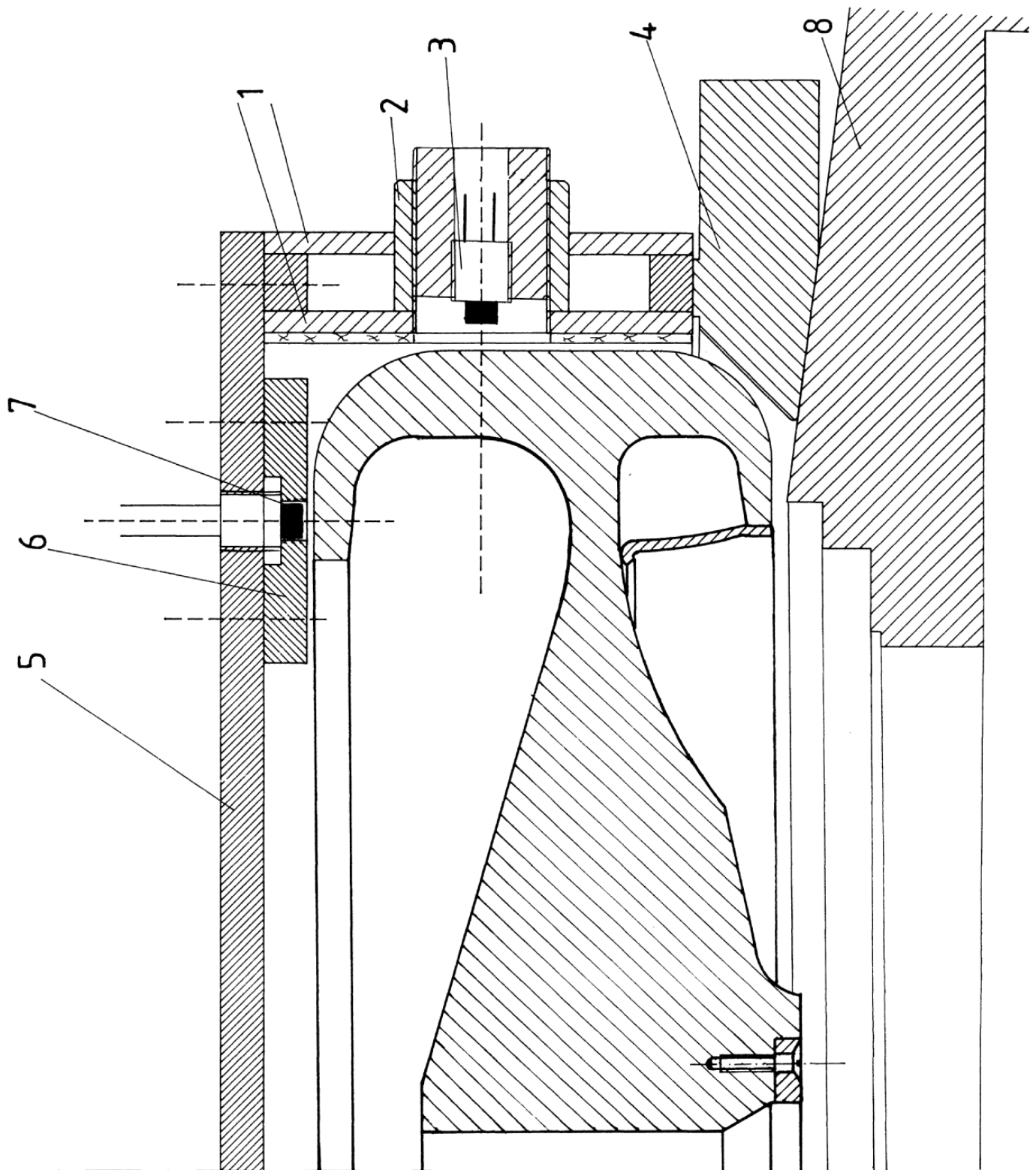


Abbildung 5.1.: Versuchsrotor im Auffangring

Dadurch sind die Sonden vor Beschädigung durch ein Anschlagen des Rotors geschützt. Weiterhin gibt es in der Verstrebung noch eine Bohrung zur Aufnahme des Fülltrichters, über welchen die Versuchsflüssigkeiten eingefüllt werden. Der Auffangring wird über radiale Abstandsstücke (in Abbildung 5. 1. nicht gezeichnet) im Rotorkessel (Abbildung 5.6(2)) zentriert. Der Boden des Rotorkessels ist Teil (8) in Abbildung 5.1.. Beim Anlegen des instabil gewordenen Rotors an Teil (4) und (6) treten hohe Normalkräfte zwischen Kunststoffdämpfer und Rotor auf. Infolge der Reibung entsteht eine tangentielle Kraft auf den Rotor, daraus entstehen Torsionsmoment und Biegemoment auf die Welle. Deshalb wurden die Bauelemente, an denen sich der Rotor anlegte, mit Glycerin geschmiert. Dieses wurde über Schläuche aus einer mit 0,5 bar Überdruck beaufschlagten Flasche an die Anschlagstellen des Rotors herangeführt. Die Schmierstellen waren:

- 1 . eine der beiden nicht für Wegmeßsonden benötigten Durchgangsbohrungen im oberen Teil des Auffangringes.
2. eine weitere Durchgangsbohrung in der Verstrebung über dem Auffangring; diese Bohrung war in Umlauflichtung des Rotors gesehen “nach“ einer Wegmeßsonde angebracht, um eine Verfälschung des Sondensignals durch große Glyzerintropfen auszuschließen.

5.1.2. Messtechnik

5. 1.2. 1. Wegmeßsystem

Für die Auswertung interessieren die Bewegungen in den drei im Rechnungsteil beschriebenen Koordinaten. Diese sind: Translationsbewegung des Rotors (r), Verkippung des Rotors (φ) und Auslenkung der Motorpendelachse von der Vertikalen (ϑ). Dementsprechend wurde ein Wegmeßsondenpaar für die Translationsbewegung des Rotors in die radialen Bohrungen des Auffangringes und ein weiteres für die Kippbewegung eingebaut. Die Sonden eines Paares lagen in 180° - Stellung gegenüber, weil dadurch das Meßsignal bei entsprechender Schaltung verdoppelt, und die Genauigkeit verbessert wird. Die verbleibende Bewegung der Motorpendelachse wurde mit zwei einzeln geschalteten Wegmeßsonden in 0° und 90° Stellung aufgenommen. Diese befanden sich am Motorpendel.

Bei den Sonden selbst handelt es sich um berührungslose Wirbelstromsensoren der Fa. Mikro - Epsilon Meßtechnik, Ortenburg, für die Bewegung metallischer Körper. Die Sonden wurden in ungeschirmter Ausführung verwendet.

Das Wegmeßsystem besteht außer den Sonden noch aus folgenden wesentlichen Komponenten:

- Sondenanschlußkabel, HF - mäßig abgestimmt auf die 1 MHz Resonanz des Meßverstärkers
- Eurocard - Gehäuse mit Stromversorgung
- digitale Anzeige zum Justieren von Motorpendel und Rotorwelle
- Oszillatoreinschub, Frequenzgenerator für alle Sonden Meßverstärker
- Demodulatoreinschübe
- Anpassungsplatinen (zu je einer bestimmten Sonde gehörig)

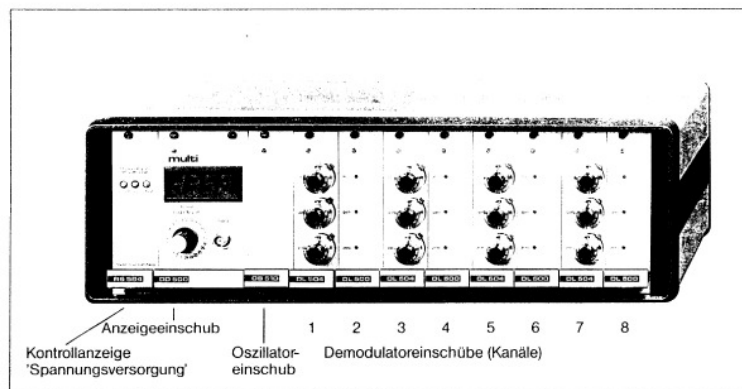


Abbildung 5.3.: Komponenten des Wegmeßsystems

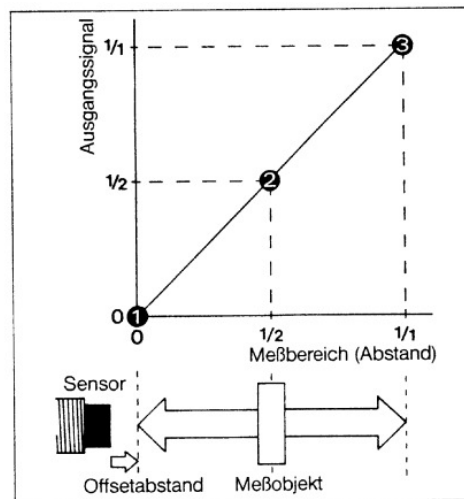


Abbildung 5.4.: Abgleich der Sonden

Jede Sonde muß vor der Anwendung zusammen mit ihrem Sondenkabel und den Platinen kalibriert werden. Dabei erfolgt der Abgleich über drei Abstandspunkte, die über ein Vergleichs- normal eingestellt werden. Ein Vergleichsnormale muß aus Isolatormaterial hergestellt sein. Für jede Sonde ist ein Offsetabstand einzuhalten; dieser entspricht dem Abstand Null. Damit werden Meßfehler durch Andruck des Rotors an die Sonde oder gar eine Zerstörung

vermieden. Der Sondenabgleich wird in mehreren Iterationsschritten mit den Potentiometern: “Zero“ (Nullpunktsabgleich), “Gain“ (Verstärkung) und “Linearity“ (Linearität) durchgeführt.

Die Kalibration ist nur für die Wegmeßsonde zusammen mit dem Sondenkabel gültig. Ein Vertauschen der Sondenkabel ist gleichbedeutend mit dem Verlust der Kalibration.

Das Ausgangssignal des Wegmeßsystems ist eine Spannung im Bereich 0 - 2 kHz. Für eine einzelne Sonde ist der Zusammenhang zwischen dem Weg des Meßobjektes und der von der Sonde abgegebenen Spannung: $1 \text{ mV} = 1 \text{ }\mu\text{m}$, für die Sondenpaare $2 \text{ mV} = 1 \text{ }\mu\text{m}$.

5.1.2.2. Meßweganzeige - speicherung - vorverstärkung und – auswertung

Die vom Wegmeßsystem gelieferten Signale wurden an den Windograf - Schnellschreiber der Fa. Gould Electronics weitergeleitet. Von diesem Gerät können sie zunächst vorverstärkt werden; der Meßbereich ist zwischen 2 und 1000 mV für den Vollausschlag der Skala zu variieren. Die Signale von 4 Kanälen können auf einem Echtzeitmonitor verfolgt und auf Diskette gespeichert werden.

Die Auswertung der vom Windografen gespeicherten Schwingungsverläufe erfolgte nach dem Überspielen auf einem PC am Bildschirm. Ebenso möglich, aber weniger genau, ist die graphische Auswertung von Meßschrieben des Thermofestkopfschreibers, der im Windograf installiert ist.

Wegmeßsystem und Windograf müssen von einem netzunabhängigen Batteriesatz gespeist werden, weil sonst die Signale durch Störzacken, welche vom Wechselrichter des Antriebsmotors herrühren, verfälscht werden.

5.1.2.3. Drehzahlmessung

Bei der Vermessung der Instabilitätsgrenzen aus aufgezeichneten Versuchsläufen ist es notwendig, neben dem Signal für die Schwingungsamplitude ein Drehzahlsignal zu haben. Deswegen wurde ein Drehzahlsignal auf einen Kanal des Windografen gelegt.

Das Signal kommt zustande, indem eine Wegmeßsonde für metallische Werkstoffe auf ein auf der Motorwelle sitzendes Zahnrad mit 72 Zähnen gerichtet wird. Zwei Teilerschaltungen bewirken, daß pro Umdrehung der Welle nur ein Impuls, und nicht 72, registriert werden. Das auswertbare Drehzahlsignal ist ein Wechsel zwischen "Null" und "Peak". Beide zusammen ergeben eine Periode, einer Umdrehung des Rotors entsprechend.

Die Drehzahlmessung an einer interessierenden Stelle des Versuchslaufes wurde am PC - Bildschirm vorgenommen. Dabei wurden die Perioden in einem markierten Zeitintervall von 1,0 sec. gezählt, wobei der Versuchszeitpunkt, dem die Drehzahl zugeordnet werden sollte, in der Mitte markierten Zeitintervalls lag. Begonnene, bzw. nicht ganz beendete Perioden waren mit dem PC - Cursor genau bestimmbar. Die Genauigkeit der Drehzahlmessung kann mit $\pm 0,1$ Hz angegeben werden.

5.1.2.4. Viskositätsmessung

Die Stabilitätsgrenzen des Rotors wurden für die Flüssigkeiten Wasser, Glycerin (87%, reinst) und fluoriertes Öl bestimmt. Es ist zweckmäßig die kinematische Viskosität der verwendeten zähen Flüssigkeiten (Fluoröl, Glycerin) zu messen, denn diese ist ein wichtiger Einflußparameter auf die Lage der Instabilitätsgrenze und außerdem abhängig von Temperatur und eventuell zugemischten Stoffen.



Abbildung 5.5.: Ubbelohde - Viskosimeter

Dafür wurde ein Ubbelohde - Viskosimeter verwendet. Dieses ist während der Messung in einem Wasserbad, dessen Temperatur von einem Thermostaten geregelt wird, auf gleicher Temperatur zu halten. Die Meßgenauigkeit der KPG® Ubbelohde- Viskosimeter der Fa. Schott, Hofheim beträgt unter den gegebenen Voraussetzungen einer manuellen Zeitmessung und Markenablesung $\pm 1\%$.

Temperatur [°C]	Viskosität Glycerin [cSt]	Viskosität Fluoröl [cSt]
20	89,6	–
21,5	80,2	–
22,5	75,6	1175
23,5	70,6	1130
24	–	1085
24,5	67,8	–
25	64,3	–

Tabelle 5.1.: Ergebnisse Viskositätsmessung

Das Ergebnis der Viskositätsmessung bei Glycerin entspricht nicht den tabellierten Werten in [24] für ein Glycerin - Wasser - Gemisch mit 87 %, sondern mit 85 % Glycerinanteil. Dieser Unterschied ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß die Messungen nicht unmittelbar nach Öffnen der Herstellerpackung durchgeführt wurden. Das hygroskopische Glycerin konnte wahrscheinlich Wasser aus der Luft aufnehmen.

Die kinematische Viskosität von Wasser wurde als sehr klein im Vergleich zu den beiden anderen Flüssigkeiten eingestuft, und der Tabellenwert $\nu = 1 \text{ cSt}$ bei 20° C angenommen.

5.1.2.5. Volumenmessung der verwendeten Flüssigkeiten

Die Wasser - und Glycerinvolumina wurden in einem 1000 ml Standzylinder abgemessen; dessen Ablesegenauigkeit beträgt $\pm 5 \text{ ml}$. Der relative Fehler ist also umso größer, je kleiner das zu bestimmende Flüssigkeitsvolumen ist. Ein Problem beim Entleeren des Zylinders ist, daß stets Reste an der Zylinderwand zurückbleiben. Deswegen wurde der Zylinder durch einmaliges Befüllen und Entleeren benetzt und danach seine Gesamtmasse bestimmt. Dann wurden die notwendigen Volumina im Zylinder abgemessen und in den Rotor gegeben. Auf den Fehler konnte man schließen, indem man nach dem Entleeren des Zylinders wieder dessen Masse bestimmte. Die Massenbestimmung erfolgte mit einer Waage der Ablesegenauigkeit $= 0,25 \text{ g}$. Nach der Durchführung der Versuche konnte festgestellt werden, daß die Fehler beim eingefüllten Volumen durch die vorherige Benetzung des Zylinders so klein sind, daß sie in ihrer Auswirkung auf die Instabilitätsgrenze vernachlässigbar sind.

Die Volumenmessung des Volumens des hochviskosen Fluoröls war mit dem Standzylinder hier nicht durchführbar, da beim Ausgießen des Öls eine zu große Menge an der Zylinder-

wand hängen blieb. Sein Volumen wurde daher mit 100 ml Kolbenspritzen aus Polyethylen abgemessen. Der Fehler betrug bei 100 ml Füllvolumen etwa das doppelte wie bei der Glycerinmessung im Standzylinder.

5.1.3. Übersicht zum Versuchsstand

Abschließend sollen wichtige Teile des Versuchstandes anhand von Abbildung 5.8. stichpunktartig aufgezählt, und bisher nicht gezeigte Teile dargestellt werden.

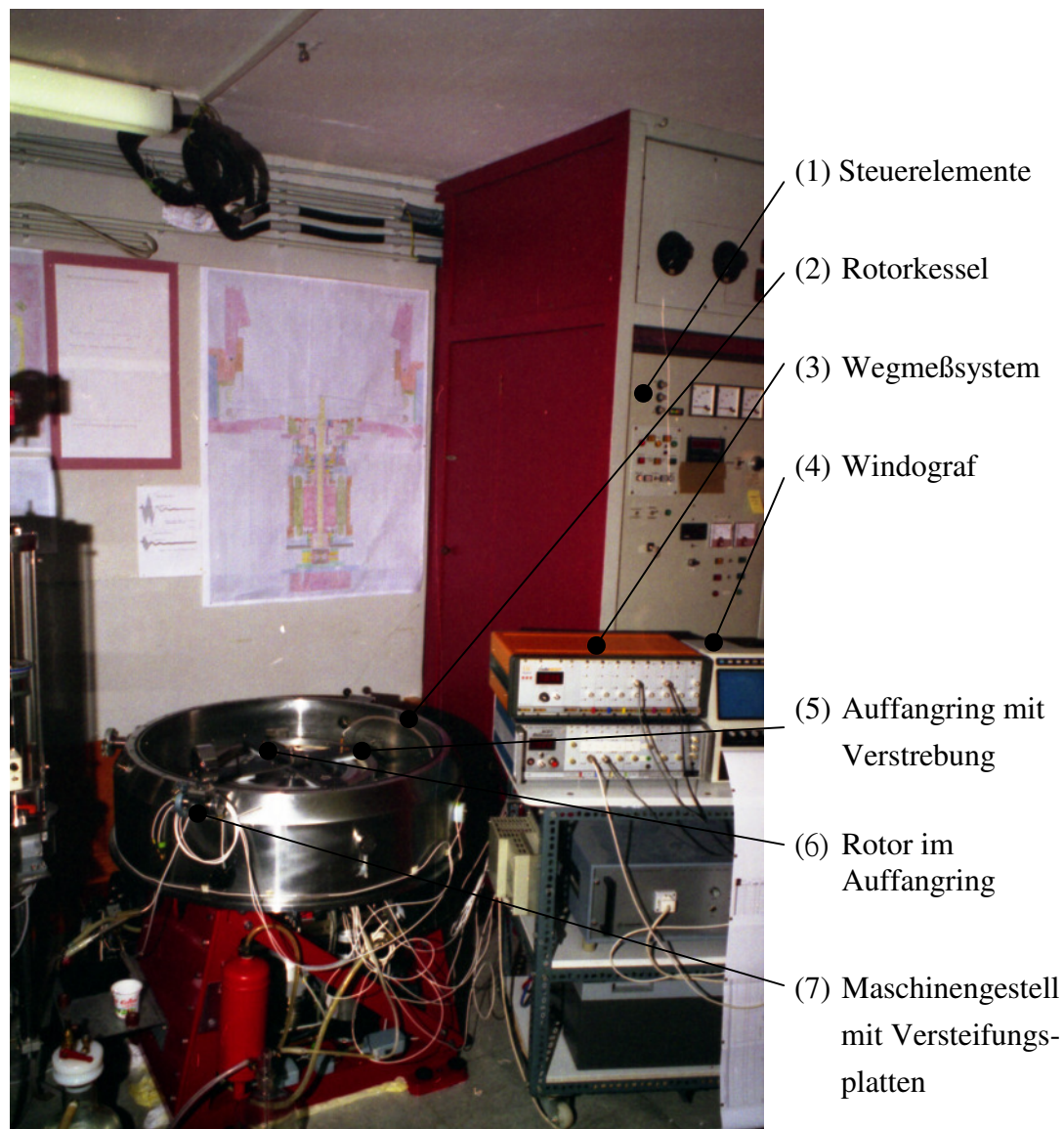


Abbildung 5.6.: Versuchsstand mit Antriebsgestell links unten und Umrichter rechts hinten

5.2. Daten des Versuchsstandes

Teil des Versuchsstandes	Formelzeichen	Größe
Rotorkreisel		
Rotormasse	m_R	15,134 kg
Polares Massenträgheitsmoment	Θ_{pR}	0,287 kg m ²
Axiales Massenträgheitsmoment	Θ_{aR}	0,154 kg m ²
Effektive Masse Wasserring	m_w	4,522 kg
Außenradius des Wasserrings	R_1	0,168 m
Tiefe des Wasserringes	T_1	5,9-23,5 mm
Halbe Höhe des Wasserringes	H_1	0,0255 m
Effektive Masse Öhring	$m_{\text{Ö}}$	8,673 kg
Außenradius des Öhringes	R_2	0,168 m
Tiefe des Öhringes	T_2	18,5 mm
Halbe Höhe des Öhringes	H_2	0,0148 m
Motorpendel		
Polares Massenträgheitsmoment	Θ_{pMP}	0,0272 kg m ²
Axiales Massenträgheitsmoment	Θ_{aMP}	2,4 kg m ²
Federmoment	$l_4 \text{ c}^*$	4600 N m
Dämpfungsmoment	C_d	7800 N m s /rad
Elastische Konstanten der Welle		
	k_{11}	424500 N/m
	k_{12}	73990 N/rad
	k_{22}	16780 N m /rad
Längen		
Rotorschwerpunkt Mitte Kardanzentrum	L	0,52 m
Freie Länge der Rotorwelle	l_1	0,30 m
Rotorschwerpunkt Unterkante 60° - Kegel	l_2	0,04 m
Hebelarm Dämpfungsmoment	l_3	0,345 m
Hebelarm Federmoment	l_4	0,325 m

Tabelle 5.2.: Daten des Versuchsstandes

5.3. Durchführung der Experimente

Zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Versuchen wurden in dieser Arbeit durchgeführt. Die erste Art sind *Schwingungsmessungen*, um den Wert der kritischen Drehzahl und die Grenzen des instabilen Drehzahlbereiches festzustellen. Die zweite Art sind Versuche zur *Dämpfung der Eigenmoden*, in denen das System durch äußere Erregung des Motorpendels mit einem Kunststoffhammer zu Schwingungen angeregt wird. Durch diese Messungen soll das theoretisch gefundene Optimum der Dämpfung für Biegeschwingung und Präzession experimentell überprüft werden.

Alle Messungen beziehen sich auf das Rotorsystem ohne Fanglager.

5.3.1. Schwingungsmessungen

Bei allen Schwingungsmessungen wurde der Umrichter für den Antriebsstrom des Motors nach Hochfahren auf eine Drehzahl von 50 Hz ausgeschaltet. Dann lief der Rotor ungebremst aus. Sein Schwungmoment war groß genug, so daß die Drehzahl nur um etwa 1 Hz/s abnahm, was für eine anschließende Vermessung der Stabilitätsgrenzen ausreichend ist.

(1) Vor den Schwingungsmessungen mit Flüssigkeitsfüllungen wurde eine günstige Ausgangslage gesucht. Das ist die Minimierung der Amplitude der erzwungenen Schwingung. Denn will man den Übergang zur Instabilität verfolgen, muß man große Rotoramplituden zulassen. Um dabei die Belastung für die Lager der Maschine gering zu halten, wird die Rotoramplitude möglichst reduziert. Dazu wurde die Rotoramplitude beim Durchgang durch die Biegeresonanz bei verschiedenen Stellungen in der 19 - zähligen Mitnehmerverzahnung gemessen. Es wurde eine Zahnstellung gefunden, bei der die gemessene Amplitude beim Durchgang durch die Biegeresonanz minimal ist. Um 180° versetzt zu dieser Zahnstellung ergab sich die größte Rotoramplitude beim Durchgang durch die Biegeresonanz. Anscheinend können sich die Abweichungen von der idealen Wellenform und die Rotor - Schwerpunktexzentrizität kompensieren oder summieren.

(2) Im zweiten Schritt wurde die kritische Drehzahl des leeren Rotors bestimmt. Dazu wurde die Drehzahl am Maximum der Schwingungsamplitude gemessen. Es wurden drei Läufe zur Bestimmung der kritischen Drehzahl durchgeführt.

(3) Im dritten Schritt wurden Vorversuche über die Lage der oberen Instabilitätsgrenze des Rotors mit Glycerin (eingefüllte Volumina 200, 400 600, 800 und 1000 ml), das einen stabilen Betriebszustand bei der Ausgangsdrehzahl von 50 Hz vermuten ließ, ausgeführt. Das Glycerin wurde über den erwähnten Trichter, der vor Versuchsbeginn mit der Versuchsflüssigkeit benetzt worden war, in den oberen Flüssigkeitsring des Rotors gefüllt; dieser wurde währenddessen bei der konstanten Drehzahl von 50 Hz gehalten. Es ist hier, wie beim folgenden Versuchsschritt (4), sinnvoll, die Flüssigkeiten erst bei der Drehzahl von 50 Hz jenseits des instabilen Bereiches einzufüllen, da man so den Rotor nicht durch einen instabilen Drehzahlbereich zu beschleunigen hat. Denn es erwies sich nicht als günstig, den Rotor mit eingeschaltetem Fanglager durch den instabilen Bereich zu beschleunigen. Bei versuchten Umschaltungen entstanden unmittelbar nach dem Abziehen des Fanglagers große Amplituden des Rotors, und dieser legte sich an den Auffangring an; dies ist auf das relativ kleine Kreiselmoment des Versuchsrotors zurückzuführen (vgl. Kap. 5.5.).

(4) Mit der Flüssigkeit Glycerin wurden die Messungen über die Lage der oberen Instabilitätsgrenze des Rotors begonnen. Bei weiteren Stabilitätsmessungen ist der "Sprung" zu weniger zähen Flüssigkeiten riskant, denn bei reibungsfreier Flüssigkeit ist bei gleichzeitiger äußerer Dämpfung mit ausschließlich instabilem Betrieb zu rechnen. Die Versuchsflüssigkeit Wasser wurde ebenfalls über den beschriebenen Trichter in den laufenden Rotor gefüllt, das zähe Fluoröl hingegen direkt aus den Spritzen in den Rotor gegeben. Für die drei erwähnten Flüssigkeiten wurden jeweils bei den Flüssigkeitsfüllungen 200, 400, 600, 800 und 1000 ml die Stabilitätsgrenzen vermessen. Bei jedem Füllvolumen wurden drei Versuchsläufe durchgeführt.

(5) Im fünften Schritt wurde versucht zu klären, wie sich die Stabilitätsgrenzen verändern, wenn man den Rotor bei der gefundenen schlechtesten Zahnstellung betreibt. Dazu wiederholte man den Versuch unter (4) mit dem leicht handhabbaren Wasser. Das war möglich, da sich bei den vorhergehenden Versuchen herausstellte, daß die obere Stabilitätsgrenze für die untersuchten Flüssigkeiten beinahe gleich ist. Bei jedem der Flüssigkeitsvolumina: 200, 400, und 600 ml wurden drei Läufe durchgeführt.

Nach diesen Experimenten kann die erste Frage dieser Arbeit nach der Stabilitätsgrenze des Rotors für verschiedene Flüssigkeiten verschiedener Zähigkeit teilweise beantwortet werden. Die Frage nach dem separaten Einfluß von Zähigkeit und Dichte auf die Instabilitätsgrenze wurde nur rechnerisch behandelt. Die Versuche für die Antwort auf die zweite Frage, die auf die Stabilitätsgrenzen des Rotors mit einem Flüssigkeitsring zur inneren Dämpfung zielte, beginnen mit dem Befüllen des unteren Ölrings: das Öl wurde mittels einer 20 ml Injekti-

onsspritze und eines Schlauches durch die Löcher im Öhringdeckel in den unteren Flüssigkeitsring gebracht. Man hat dabei zu beachten, daß die Oberflächenwellen des Öhringes nicht an den Öhringdeckel anstoßen, da sonst die effektive Flüssigkeitsmasse verändert wird, und muß deswegen das maximale Füllvolumen entsprechend begrenzen.

Bei diesen Versuchen muß der Rotor durch den instabilen Drehzahlbereich, welchen der Fluoröhring bewirkt, beschleunigt werden, da der untere Ring nicht während des Laufes befüllt werden kann. Durchfährt man den instabilen Drehzahlbereich mit eingeschaltetem Fanglager und zieht dieses dann ab, wird der Rotor bei ca. 35 Hz instabil (~ 2 sec.) und es entsteht ein kurzes, aber heftiges Anlegegeräusch; danach fängt sich der Rotor wieder. Beschleunigt man den gefüllten Rotor ohne Fanglager durch die Instabilität so, ist dieser über einen ca. doppelt so langen Zeitraum instabil, aber das Anlegegeräusch ist weniger hart und das Anlegen geschieht schon bei geringerer Drehzahl zwischen 10 und 25 Hz. Deswegen wurde der gefüllte Rotor bei diesen Versuchen ohne Fanglager durch die Instabilität beschleunigt. Beispiele für die beiden unterschiedlichen Beschleunigungsarten zeigt Abbildung 5.7.. Größere Rotoren als dieser brauchen nicht ohne Fanglager durch den instabilen Bereich beschleunigt zu werden; diese werden beim Abziehen des Fanglagers wegen des größeren Kreismomentes nicht instabil.

(6) Zunächst wurden die Stabilitätsgrenzen des Rotors für verschiedene Füllungen (200, 300, 400, 450, 480 ml) des zähen Fluoröls im unteren Ring untersucht.

(7) Die Schwingungsmessungen bei der Fluorölfüllung mit der besten inneren Dämpfungswirkung (ca. 480 ml) und Wasserfüllungen 400, 500, 600 und 700 ml im oberen Ring schließen die Reihe von Versuchen der ersten Art ab.

Wo liegt das Optimum der Dämpfung für die Präzession und Biegeschwingung? So lautete die dritte Frage.

5.3.2. Dämpfung der Eigenmoden.

(8) Zur Beantwortung dieser Frage wurde der folgende Versuch durchgeführt: das Motorpendel wurde bei 50 Hz Rotordrehzahl durch impulsartige Stöße mit einem Kunststoffhammer angeregt, und dazu nacheinander die Füllhöhe des Öls in der Dämpfungskammer und das Wasservolumen im oberen Ring variiert.

Die eingestellte Füllhöhe des Öls in der Dämpfungskammer betrug (in der Reihenfolge der Durchführung der Experimente) 31, 26, 21, 16 und 11 mm. Die Änderung der Füllhöhen er-

folgt nach dem Prinzip der kommunizierenden Röhren. Eine "Röhre" ist hierbei die Dämpfungskammer selbst, die andere ein Schauglas am Maschinengestell; beide sind über einen Schlauch miteinander verbunden. Das Wasser wurde bei 50 Hz Drehzahl über den Trichter in den oberen Rotorring eingefüllt. Das Füllvolumen wurde in 100 ml Schritten von 0 auf 1000 ml gesteigert, ohne den Rotor dazwischen abzubremesen. Dabei befanden sich 480 ml Dämpfungöl wie in 7.) im unteren Ring des Rotors. Die Anregung des Motorpendels wurde bei jeder Füllhöhe der Dämpfungskammer und bei jedem Wasservolumen im oberen Ring dreimal durchgeführt.

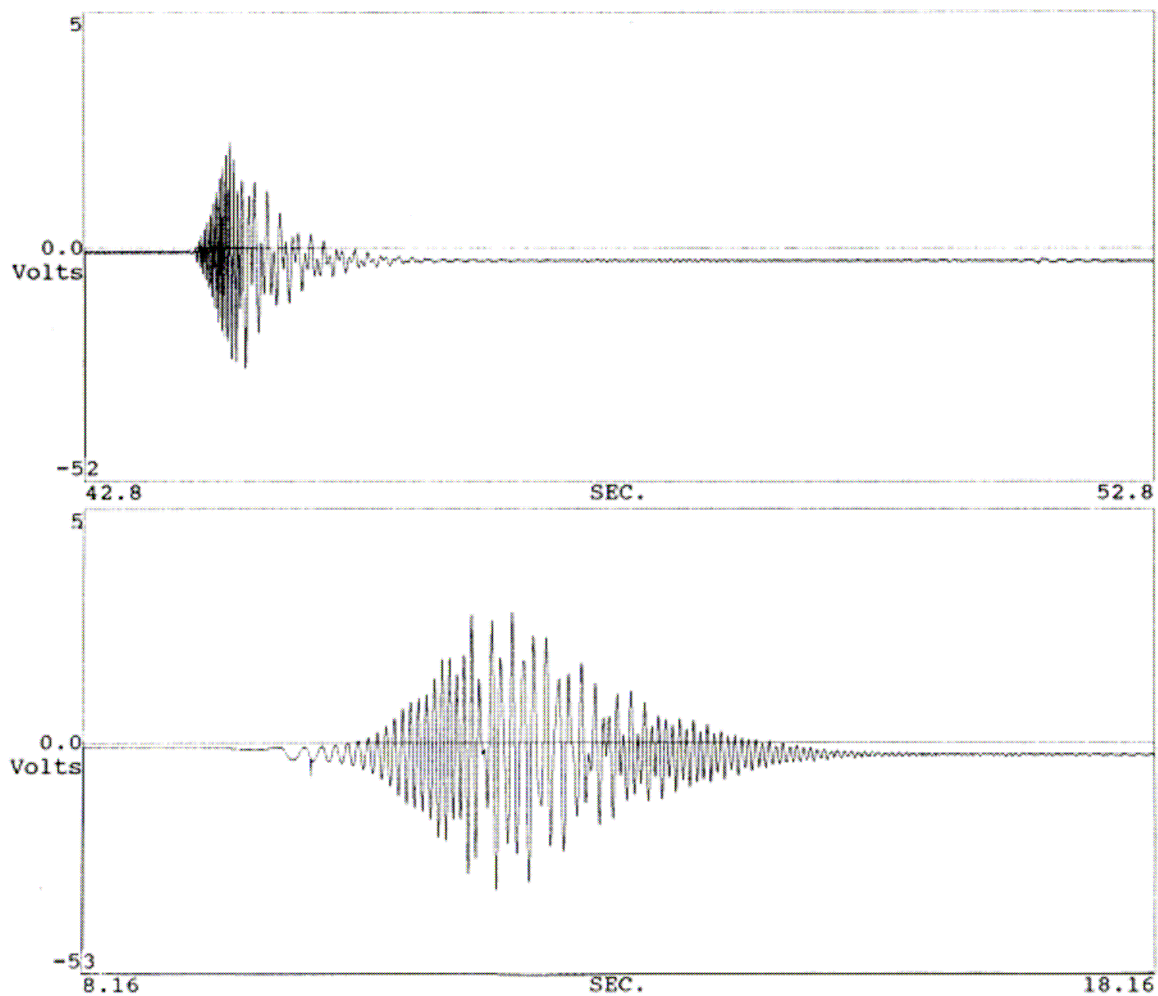


Abbildung 5.7.: Zur Beschleunigung des Rotors durch den instabilen Drehzahlbereich mit 480 ml Ölfüllung im unteren Ring

- a) Amplituden unmittelbar nach einer Fanglagerumschaltung
- b) Amplituden bei einer Beschleunigung des Rotors durch den instabilen Drehzahlbereich ohne Fanglager

5.4. Zur Bestimmung der Gesamtexzentrizität

5.4.1 Bestimmung der Gesamtexzentrizität aus den gemessenen Amplituden der Biegeschwingung im überkritischen Drehzahlbereich.

Wir wollen versuchen, die Gesamtexzentrizität des Rotorsystems aus den gemessenen Amplituden der Biegeschwingung im überkritischen Bereich zu bestimmen. Dazu machen wir zunächst Annahmen und prüfen dann, ob diese gerechtfertigt sind: erstens soll der Rotor aus homogenem Werkstoff hergestellt sein; somit soll die geometrische Mitte des Rotors mit dem Rotorschwerpunkt zusammenfallen und die Gesamtexzentrizität geht damit nur auf die Exzentrizität der Wellenbohrung zurück. Unter diesen Annahmen liefern die Wegmeßsonden in ihrer Eichung ein Signal, das die Bewegung des Rotorschwerpunktes wiedergibt, wenn man davon absieht, daß eine exakte Drehbearbeitung des Rotors an der Außenkontur nicht vorausgesetzt werden kann. (Geometriefehler der Außenkontur: 4 Zacken/Umdrehung)

Versucht man nach diesen Annahmen, die Frage nach der Größe der Exzentrizität des Rotor systems zu beantworten, so wird man diese über

$$r_s = e \left| \frac{1}{1 - \eta^2} \right| \quad (5.1)$$

aus der Amplitude der Biegeschwingung des leeren Rotors bei optimaler Zahnstellung zu errechnen. Bestimmt man mit (5.1) die Gesamtexzentrizität bei verschiedenen überkritischen Drehzahlen β aus der Rotoramplitude r_s , so erhält man mit zunehmender Drehzahl eine immer zunehmende Exzentrizität. Diese Zunahme ist verständlich, weil in den Versuchsläufen des leeren Rotors die aufgezeichnete Amplitude auf einem konstanten, von Null verschiedenen Niveau bleibt, obwohl sie, wenn unsere Annahmen richtig wären, gegen Null gehen müßte. Abbildung 5.8. zeigt die Standardabweichung der gemessenen Amplitude als Maß für die Auslenkung des Rotors. Die Standardabweichung wurde als Maß verwendet, weil sie mittels Auswertesoftware genau bestimmbar war. Ihr Wert wurde jeweils über Intervalle von 0,4 Sekunden berechnet und über der zugehörigen Drehzahl aufgetragen.

Aufgrund von Abbildung 5.8. müssen wir feststellen: der Rotor hat vermutlich neben seiner Fehler an der Außenkontur einen anderen so, daß geometrischer Mittelpunkt und Rotorschwerpunkt nicht zusammenfallen. Wir zeichnen mit den Sonden nicht die Bewegung des Rotorschwerpunktes, sondern vermutlich des geometrischen Mittelpunktes des Rotors auf. An Abbildung 5.8. erkennt man außerdem, daß die Innenkontur des oberen Flüssigkeitsringes geometrisch sehr exakt sein muß, denn das Vorhandensein und die Art einer Flüssigkeitsfüllung

haben offensichtlich keinen signifikanten Einfluß auf die Amplitude bei überkritischen Drehzahlen.

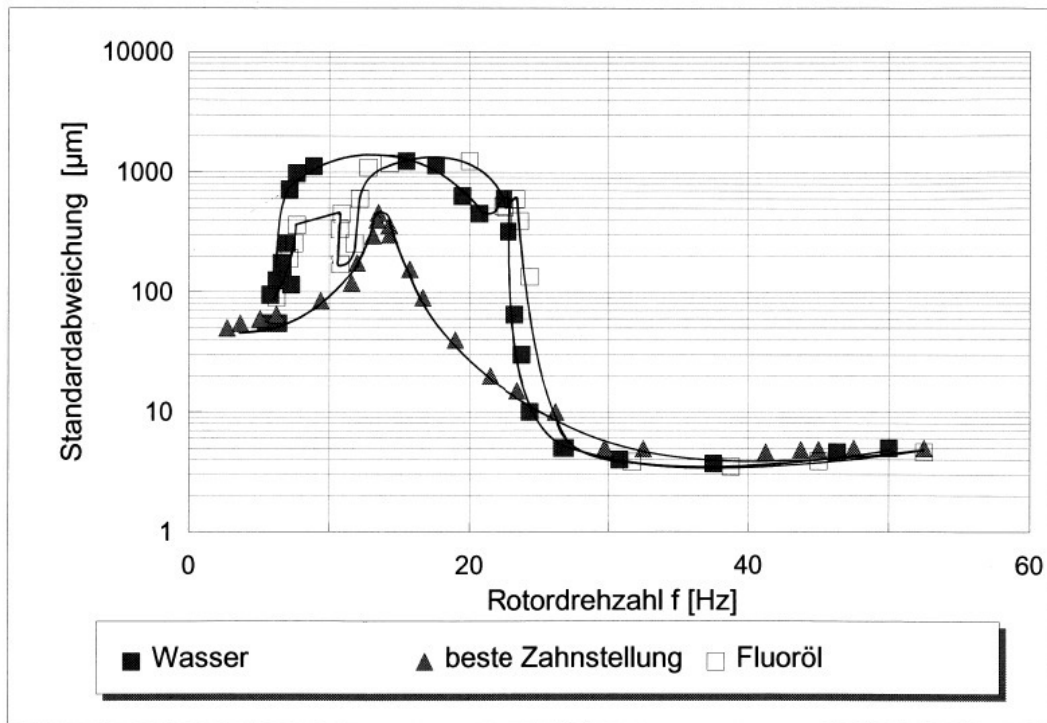


Abbildung 5.8.: Gemessene überkritische Rotoramplitude (Standardabweichung) bei leerem Rotor und verschiedenen Flüssigkeiten im oberen Flüssigkeits ring (jeweils beste Zahnstellung)

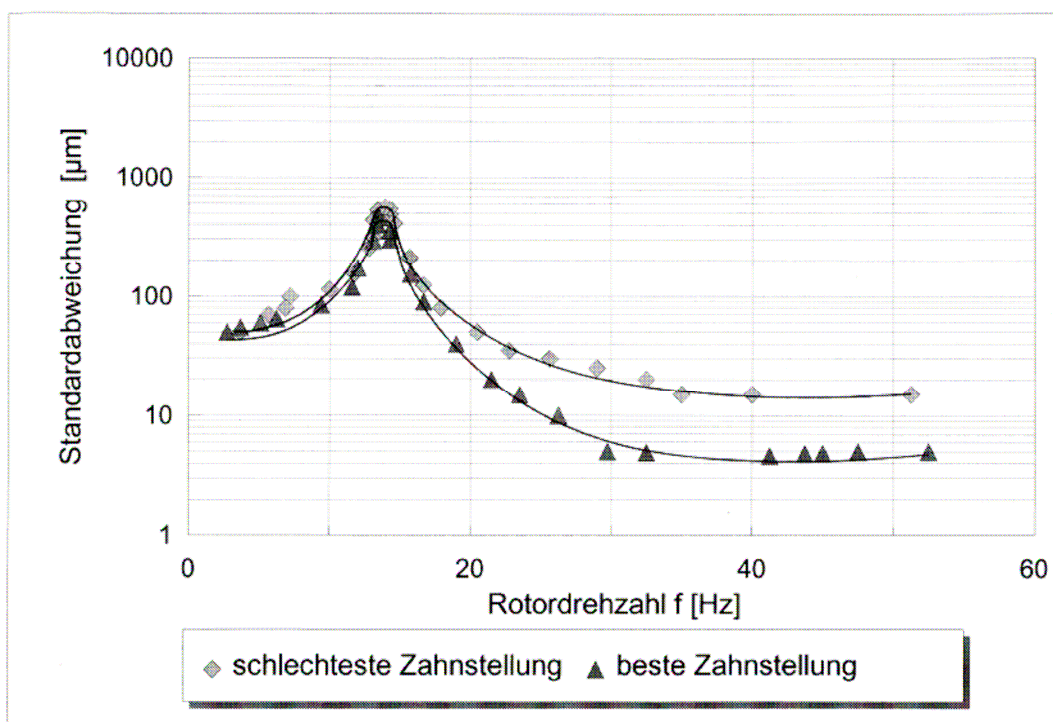


Abbildung 5.9.: Gemessene überkritische Rotoramplitude (Standardabweichung) bei bester und schlechteste Zahnstellung

Nach den bisherigen Betrachtungen können Wellendurchstoßpunkt und Durchstoßpunkt der idealen Drehachse zusammenliegen, d.h. die Ausbiegung der Welle am oberen Ende gegenüber der idealen Drehachse kann gleich Null sein (Abbildung 5.10.).

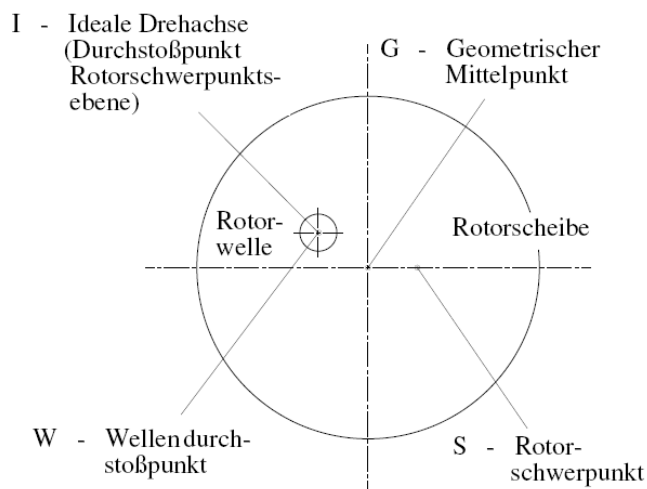


Abbildung 5.10.: Lage von Wellendurchstoßpunkt, Rotorschwerpunkt, idealer Drehachse und geometrischem Mittelpunkt des Rotors

Nun vergleichen wir aber noch die Standardabweichung der gemessenen überkritischen Amplitude bei schlechtester Zahnstellung mit der bei bester Zahnstellung. (Abbildung 5.9.). Auch bei schlechtester Zahnstellung erhält man bei überkritischen Drehzahlen eine konstante Amplitude; doch ist diese bei der schlechtesten Zahnstellung um etwa das dreifache höher als bei der besten Zahnstellung. Das führt uns dazu, den allgemeinen Fall anzunehmen, daß Rotorschwerpunkt, geometrische Mitte, Wellendurchstoßpunkt und ideale Drehachse auch im Stillstand der Maschine jeweils nicht zusammenfallen, sonst könnten bei unterschiedlichen Zahnstellungen nicht unterschiedliche, konstante Amplituden bei überkritischem Betrieb auftreten

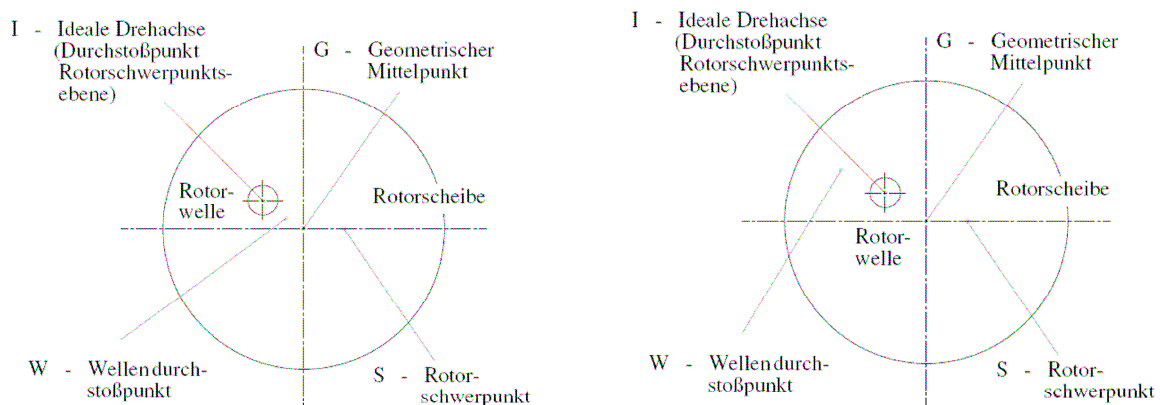


Abbildung 5.11.: Lage von Wellendurchstoß-, Rotorschwer- und geometrischem Mittelpunkt sowie idealer Drehachse des Rotors bei a) schlechtester und b) bester Zahnstellung

Bei vernachlässigbarem äußeren Formfehler des Rotors geben die Sonden die Bewegung des geometrischen Mittelpunktes des Rotors wieder. Quantitative Aussagen über die Gesamtexzentrizität aus Messungen im Überkritischen sind damit sehr schwierig, zumal dabei auf jeden Fall die Wellenverformung durch Kreiseffekte mitberücksichtigt werden muß.

5.4.2. Näherungsweise Bestimmung der Gesamtexzentrizität aus der Amplitude in der Biegeresonanz

Man kann weiterhin versuchen, die Gesamtexzentrizität näherungsweise aus der gemessenen Amplitude in der Biegeresonanz zu ermitteln. Die gemessenen Amplituden in der Resonanz sind so groß, daß man die Werte aller Rotorungenauigkeiten dagegen vernachlässigen kann. Bei Gasch/Pfützner [3] findet man eine Gleichung - wir wollen aus Platzgründen auf ihre Herleitung verzichten - zur Bestimmung der Amplitude des Wellendurchstoßpunktes der Biegeschwingung in der Resonanz.

$$r_w = \frac{e}{2 \cdot D_a} \quad (5.2)$$

In der Resonanz stehen die Vektoren OW und WS senkrecht aufeinander. Deshalb schreiben wir:

$$r_s^2 = r_w^2 + e^2 \quad (5.3)$$

Setzt man (5.2) in (5.3) ein, so erhält man:

$$e = \frac{r_s}{\sqrt{1 + \frac{1}{4D_a^2}}} \quad (5.4)$$

Dabei ist $D_a = \frac{\delta}{\omega}$ und $\delta = \frac{1}{nT^d} \ln\left(\frac{q(t)}{q(t+nT^d)}\right)$.

Wertet man mit (5.4) die aufgezeichneten Schwingungsverläufe von den Versuchen zur Bestimmung der kritischen Drehzahl für den leeren Rotor aus, so erhält man Tabelle 5.3.. In ihr ist die Auswertung der Exzentrizität zu Versuchsbeginn und etwa nach der Hälfte der Versuche zu sehen.

	Näherungsweise aus der Amplitude in der Biegeresonanz bestimmte Gesamtexzentrizität [μm]
Messung Ω_{krit} zu Versuchsbeginn:	
Lauf 1	11,7
Lauf 2	24,4
Lauf 3	32,5
Messung Ω_{krit} zur Halbzeit der Versuche:	
Lauf 1	43,5
Lauf 2	45,5
Lauf 3	44,5

Tabelle 5.3.: Gesamtexzentrizität aus der Amplitude in der Biegeresonanz

Nach diesem Ergebnis muß man zunächst annehmen, daß die Rotorwelle leicht plastisch verformbar ist. Vor den Messungen Ω_{krit} zu Versuchsbeginn wurden aber Vorversuche zur Minimierung der Rotoramplitude gemacht. Dabei passierte der Rotor ebenfalls die Biegeresonanz. Bei leichter Verformbarkeit müßte man annehmen, daß die Versuche zur kritischen Drehzahl bereits mit großer Gesamtexzentrizität beginnen, was nicht der Fall ist. Dieser Widerspruch konnte nicht geklärt werden; die Frage nach einem Wert der Gesamtexzentrizität ist auf diese einfache Weise nicht zu beantworten.

5.5. Fanglagerumschaltungen bei Rotoren mit kleinem und großem Kreismoment

Bei allen Versuchen mit innerer Dämpfung ergab sich die Notwendigkeit, den Rotor durch den vom unteren Flüssigkeitsring verursachten instabilen Drehzahlbereich zu beschleunigen. Die Beschleunigung wurde teilweise unter Verwendung des Fanglagers versucht. Unmittelbar nach dem Abziehen des Fanglagers wurden dabei die Schwingungsamplituden sehr groß, und es entstand ein hartes Anlegegeräusch. Danach fing sich der Rotor wieder. Nur ein kleiner Teil der Umschaltungen (2 von 15 Umschaltungen) gelang mit kleiner Schwingungsamplitude ohne Anlegen des Rotors. Wir wollen die Ursache dieser großen Schwingungsamplituden untersuchen.

Zunächst kann ein Einfluß des eingefüllten Flüssigkeitsvolumens auf deren Größe vermutet werden. Wertet man die Schwingungsverläufe bei der Fanglagerumschaltung bezüglich Größe und Dauer der Schwingungsamplituden in Abhängigkeit des eingefüllten Volumens aus, so stellt man fest, daß ein Einfluß der Größe der Flüssigkeitsfüllung nicht signifikant vorhanden ist. Ebenfalls nicht gegeben ist ein Einfluß der unmittelbar vor dem Umschalten vorhandenen Biegeschwingung. Ihre Amplitude und Form ist für gelungene wie nicht gelungene Umschaltungen gleich.

Wir sind auf eine erregende, zufallsartige Kraft bei der Fanglagerumschaltung selbst gewiesen. Solche Kräfte können beispielsweise dadurch entstehen, daß sich der Innenring des Pendelkugellagers am Fanglagerkonus der Welle verkantet und beim Abziehen einen einseitigen Schlag auf die Anordnung ausübt. Eine andere Ursache für eine einseitige Kraft auf den Fanglagerkonus beim Abziehen des Fanglagers ist der dünne Ölfilm zwischen dem Innenring des Pendelkugellagers und dem Konus. Man kennt dies Phänomen: will man zwei Glasplatten, zwischen denen sich ein dünner Flüssigkeitsfilm befindet, in tangentialer Richtung auseinanderziehen, so gelingt es leicht. Sehr schwierig wird dieser Versuch bei vertikaler Kraft- richtung an den Platten.

Wertet man Fanglagerumschaltungen im gleichen Versuchsstand von einem Rotor mit etwa dem doppelten Durchmesser des Versuchsrotors aus, so sieht man, daß die Schwingungsamplituden bei dessen Fanglagerumschaltungen stets sehr viel kleiner sind als beim Versuchsrotor und daß dieser nie anschlägt. Dieser große Rotor hat etwa zwölfmal größere Massenträgheitsmomente als der Versuchsrotor; sein Kreismoment ist also ebenfalls zwölf mal größer. Der wesentliche Einfluß auf die Größe der Schwingungsamplitude nach der Umschaltung ist also das Kreismoment; dieses wirkt dem Moment aus der anregenden Kraft entgegen.

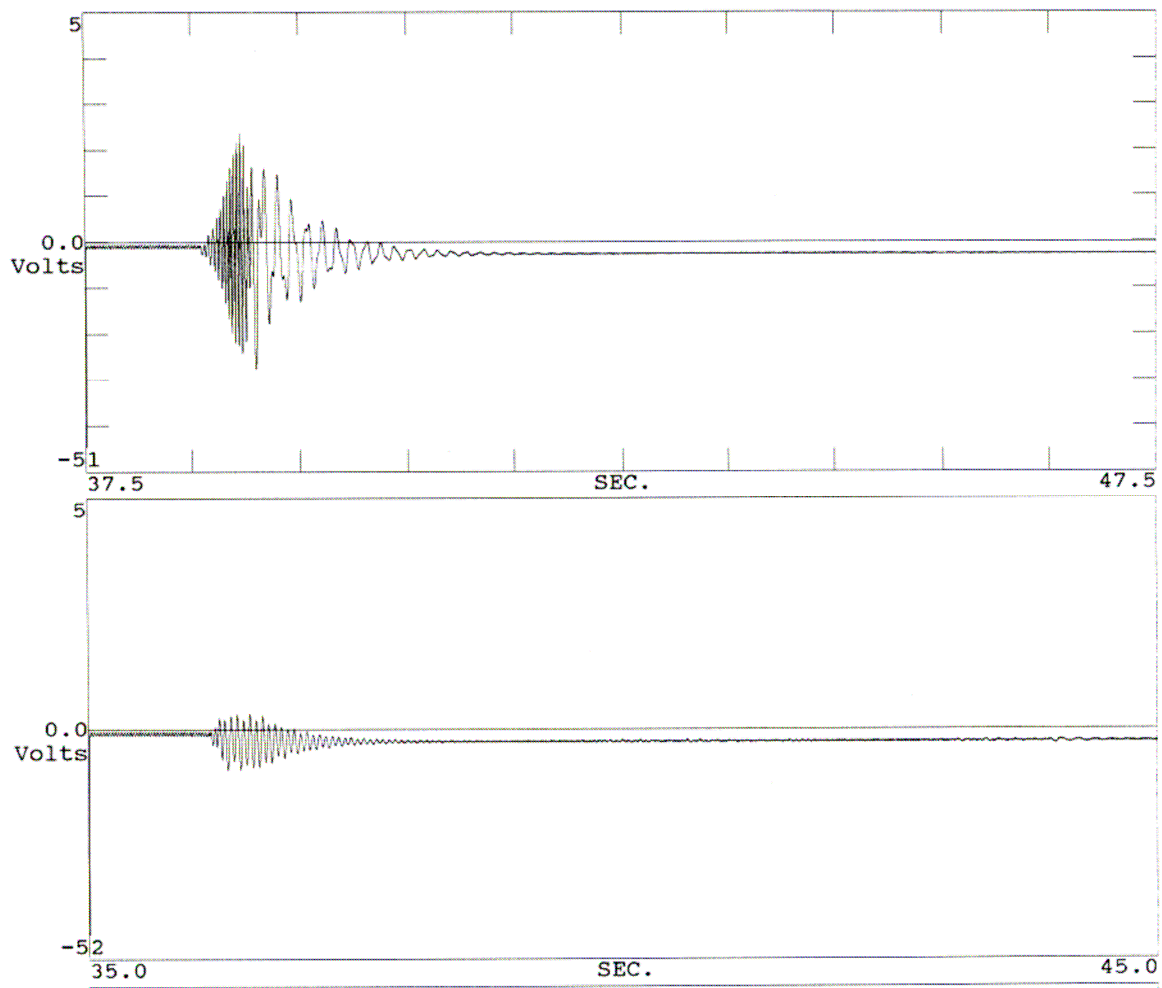


Abbildung 5.12.: Fanglagerumschaltung a) mit b) ohne Anschlagen des Rotors

6. Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die bei der Konstruktion eines flüssigkeitsgefüllten Rotors entstehenden Fragen bearbeitet. Kapitel 6.2. behandelt die Instabilitätsgrenze für verschiedene Flüssigkeiten, Kapitel 6.5. die Wirkung der inneren Dämpfung auf die Instabilitätsgrenze und Kapitel 6.7. die Dämpfung der verschiedenen Eigenmoden.

6.1. Kritische Drehzahl des leeren Rotors

Als Drehzahl in der Biegeresonanz (kritische Drehzahl) ergab sich bei den drei durchgeführten Messungen jeweils ein Wert von 14,0 Hz. Die Amplitude beim Durchgang durch die Biegeresonanz nahm von einer Messung zur nächsten zu (vgl. Kap. 5.4.2.).

6.2. Instabiler Drehzahlbereich bei verschiedenen Flüssigkeiten im oberen Ring

6.2.1. Verlauf der Rotoramplituden beim Passieren der Instabilität

Die Verläufe der Rotoramplituden beim Passieren der Instabilität können für alle drei Flüssigkeiten hinsichtlich ihrer Struktur in drei Gruppen unterteilt werden:

- 1.) Bei kleiner Flüssigkeitsfüllung gibt es keinen echten instabilen Bereich, sondern nur eine reduzierte kritische Drehzahl; der Rotor zeigt große Amplituden, schlägt aber nicht an den Auffangring an.
- 2.) Es ist ein ausgeprägter instabiler Bereich mit Anschlagen des Rotors vorhanden; dieser wird von einer größeren Zahl von Schwebungsknoten (bis zu 10) unterbrochen.
- 3.) Schließlich, als letztes Glied der Reihe ist der voll ausgebildete instabile Drehzahlbereich zu erwähnen. Dabei ist über einen Zeitraum (bis zu 2,5 sec.) die Rotoramplitude nahezu konstant und so groß, daß sich der Rotor an den Auffangring anlegt. Dieser Bereich wird immer von mindestens einem Schwebungsknoten zu Beginn und am Ende abgeschlossen. Die Anzahl der Schwebungsknoten zu Beginn und Ende des instabilen Bereichs erhöht sich offensichtlich mit zunehmender Füllmenge und abnehmender Flüssigkeitszähigkeit. Beispielhafte Verläufe für diese drei Gruppen zeigt Abbildung 6.1.. Die Reihe von Bild 6.1. kann man sich verdeutlichen. Macht man den Gang von reibungsfreier zu sehr zäh werdender und schließlich erstarrender Flüssigkeit, wobei die Flüssigkeitsdichte konstant bleibt, so stellt man fest, daß sich dabei der instabile Drehzahlbereich einengen muß.

Die drei untersuchten Flüssigkeiten kann man folgendermaßen in dieses Schema einordnen:

	200 ml	400 ml	600 ml	800 ml	1000 ml
Wasser	2-3	3	3	3	3
Glycerin	2	2-3	3	3	3
Fluoröl	1	2	2-3	3	3

Tabelle 6.1.: Zur Struktur des instabilen Drehzahlbereiches

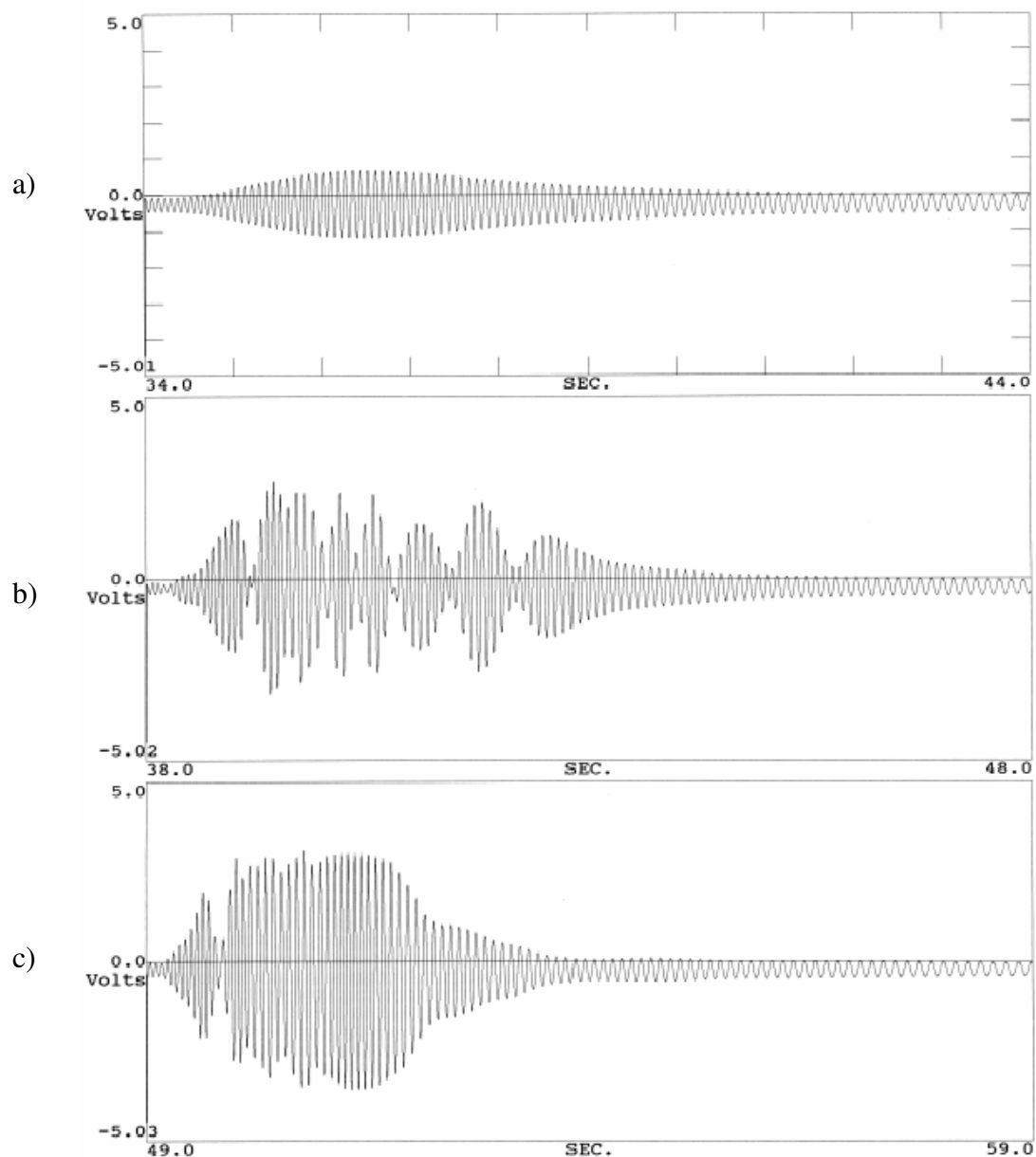


Abbildung 6.1.: Beispiele Verläufe für die Einteilung in drei Gruppen

a) Fluoriertes Öl, b) Glycerin, c) Wasser; Füllvolumen jeweils 200 ml

6.2.2. Obere Stabilitätsgrenze. Vergleich Messung - Rechnung

Als nächstes betrachten wir die obere Grenze des instabilen Drehzahlbereiches für verschiedene Füllvolumina von Wasser, Glycerin und fluoriertem Öl im oberen Flüssigkeitsring ohne innere Dämpfung; dabei werden rechnerische mit experimentellen Werten verglichen.

Die Messung geht so vor sich, daß der Rotor auf eine Drehzahl von 50 Hz hochgefahren wird und dann bei abgeschaltetem Umrichter, allein durch Lagerreibung allmählich gebremst wird. Die Bremsrate betrug etwas mehr als 1Hz/s. Mit "oberer Stabilitätsgrenze" wurde bei der Auswertung diejenige Drehzahl bezeichnet, bei der ausgehend von einer Drehzahl von 50 Hz zuerst Schwingungsamplituden größer als 125 μm auftreten. Stabilitätskriterium bei den Rechnungen ist der Vorzeichenwechsel des Dämpfungsexponenten von "minus" nach "plus". Zum Vermessen der "unteren Stabilitätsgrenze" hätte man den Rotor aus dem Stillstand beschleunigen müssen. Dazu muß der Umrichter eingeschaltet werden, der allerdings so große elektrische Störungen verursachte, daß auf die Messungen verzichtet werden mußte, obwohl gerade die untere Instabilitätsgrenze für die Konstruktion eine wesentliche Rolle spielt.

Die für Wasser, Glycerin und fluoriertes Öl gemessenen oberen Instabilitätsgrenzen in Abbildung 6.2. sind nahezu gleich. Flüssigkeiten, die sich sowohl nach Dichte wie Zähigkeit unterscheiden, können jedoch nicht unmittelbar miteinander verglichen werden. Den Einfluß von Dichte und Zähigkeit auf die Stabilitätsgrenze werden wir deshalb in Kapitel 6.2.3. separat durch Rechnung beurteilen.

Die gemessene und theoretische Stabilitätsgrenze stimmen für Fluoröl und Glycerin gut überein, außer bei großen Füllgraden, d.h. großen Volumina. Diese Abweichung beruht vermutlich darauf, daß die freie Ringhöhe der Flüssigkeit bei kleinen Volumina abnimmt, weil sich die Flüssigkeitsoberfläche im Bereich der Ausrundungsradien des Rotorringes befindet. Diese Änderung wurde bei den der Abbildung 6.2. zugrundeliegenden Rechnungen nicht berücksichtigt. Für Wasser zeigt sich eine große Differenz zwischen Messung und Rechnung. Diese wurde ebenso wie bei Glycerin und Fluoröl mit der Formel für die resultierende Kraft aus zäher Flüssigkeit durchgeführt. Der berechnete Wert, wo Instabilität einsetzt, liegt aber viel höher als der gemessene. Man muß schließen, daß entweder eine höhere Zähigkeit des Wassers im Experiment vorlag, als in der Rechnung angenommen, oder erhöhte Reibung durch Turbulenz. Für eine erhöhte Viskosität der Wasserfüllung gibt es keinen Grund. Da aber die Wellenbewegung an der Grenze zum instabilen Bereich schon eine endlich große Amplitude hat, ist Turbulenz durchaus möglich.

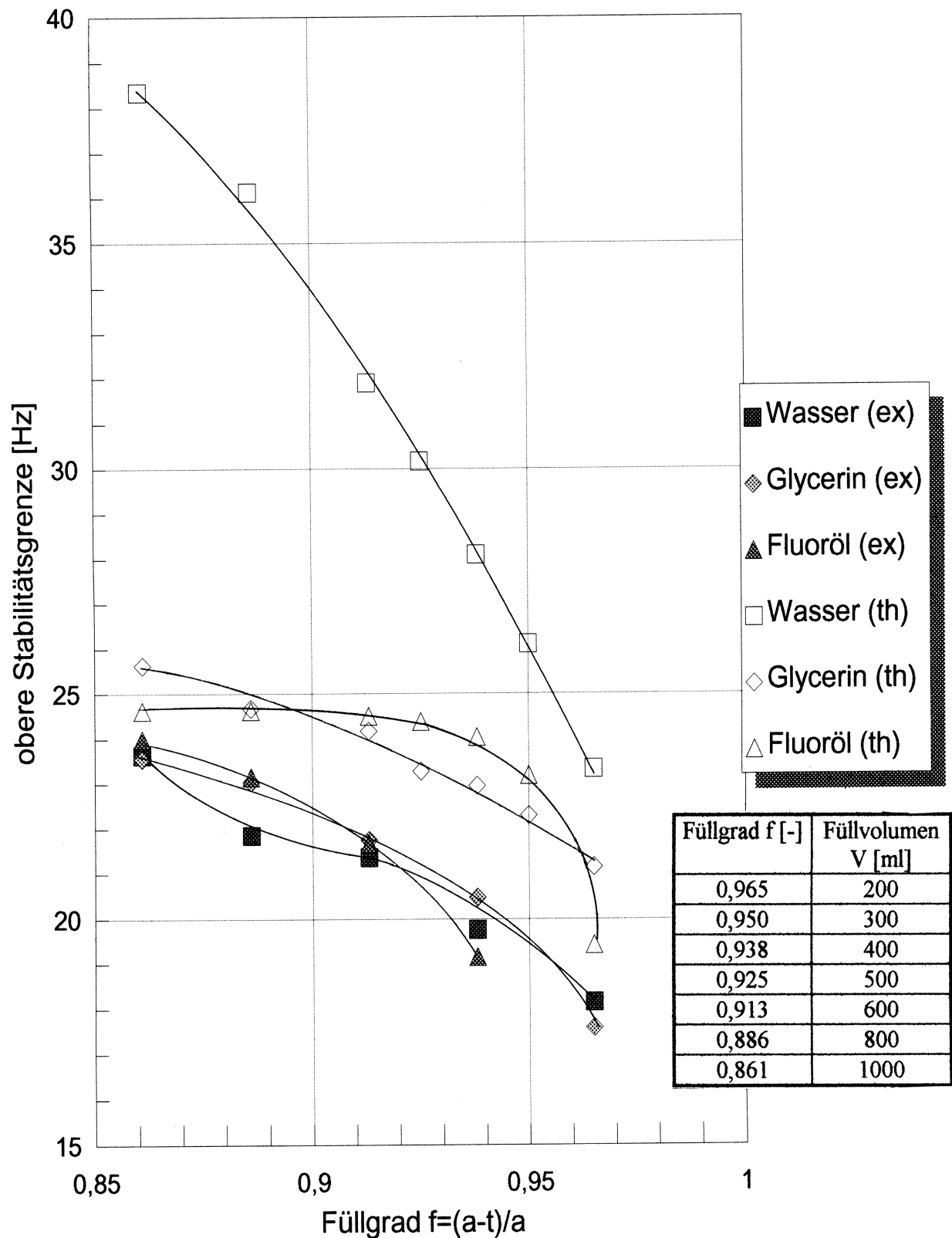


Abbildung 6.2.: Obere Stabilitätsgrenze des Versuchsrotors für Wasser ($\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, $\nu = 1 \text{ cSt}$), Glycerin ($\rho = 1,22 \text{ g/cm}^3$, $\nu = 90 \text{ cSt}$) und fluoriertes Öl ($\rho = 1,92 \text{ g/cm}^3$, $\nu = 1200 \text{ cSt}$) Experimentell (ex) und Theoretisch (th)

6.2.3. Einfluß von Zähigkeit und Dichte

Wir beschreiben jeweils separat den Einfluß von Dichte und Zähigkeit auf die obere Stabilitätsgrenze. Dabei können wir nur Rechenergebnisse verwenden, da für die Versuche keine Flüssigkeiten gleicher Dichte bei unterschiedlicher Zähigkeit zur Verfügung standen.

Abbildung 6.3. zeigt die berechnete obere Stabilitätsgrenze für zwei unterschiedliche Dichten $\rho_1 = 1,91 \text{ g/cm}^3$ entsprechend fluoriertem Öl und $\rho_2 = 0,97 \text{ g/cm}^3$ entsprechend Silikonöl bei variiert kinematischer Viskosität. Die Stabilitätsgrenze für die Flüssigkeit geringerer Dichte liegt tiefer. Gemeinsam ist beiden Kurven, daß die Instabilitätsgrenze mit zunehmender Zähigkeit kleiner wird. Es existiert jeweils ein relatives Minimum für die Instabilitätsgrenze; dieses ist bei der Flüssigkeit mit der größeren Dichte stärker ausgeprägt. Mit verschwindender Dichte $\rho = 0$ wird die Instabilitätsgrenze beim Wert 0 liegen. Berechnungen mit Flüssigkeitszähigkeiten $< 0,1 \text{ cm}^2/\text{s}$ sind nicht möglich, da die resultierende Kraft aus reibungsbehafteter Flüssigkeit dort keine genauen Werte liefert.

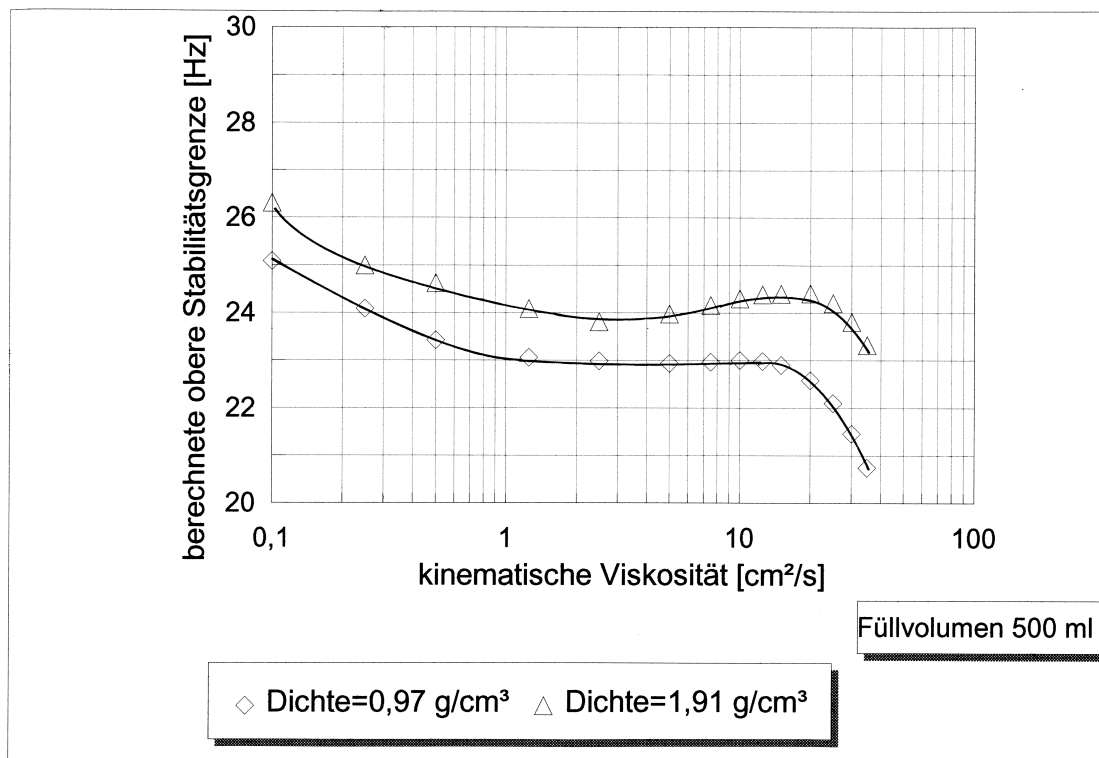


Abbildung 6.3.: Berechnete obere Stabilitätsgrenze für zwei Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte ($\rho_1 = 1,91 \text{ g/cm}^3$ und $\rho_2 = 0,97 \text{ g/cm}^3$) in Abhängigkeit der kinematischen Viskosität

6.3. Einfluß der Rotorbefestigung auf der Welle auf die Instabilitätsgrenze

In diesem Kapitel wollen wir die Messungen der Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit von der Winkelstellung des Rotors auf der Welle besprechen. Bei Vorversuchen hatten sich, je nach Stellung des Rotors auf der Welle, verschiedene Amplituden beim Durchgang durch die Biegeresonanz ergeben (vgl. Kap. 5.2.1. 1.)). Weil sich die Stabilitätsgrenzen von Fluoröl bzw. Glycerin und Wasser nicht wesentlich unterscheiden, wird hierbei Wasser als Versuchsflüssigkeit im oberen Ring verwendet. Der untere Flüssigkeitsring bleibt leer. In Abbildung 6.4. sind die oberen Stabilitätsgrenzen für verschiedene Wasserfüllungen bei bester und schlechtester Zahnstellung eingetragen.

Man erkennt, daß sich die Stabilitätsgrenzen bei schlechtester und bester Zahnstellung des Rotors kaum unterscheiden. Dafür können zwei Gründe vermutet werden. Erstens: wenn die Anregung der Ringwellen hauptsächlich von der Erregerfrequenz abhängt und nur in zweiter Linie von der Erregeramplitude, dann unterscheiden sich auch die Stabilitätsgrenzen kaum. Zweitens kann sich im Verlauf der vorhergehenden Versuche die Rotorwelle so verformt haben, daß sich die Lage von bester bzw. schlechtester Zahnstellung verschoben haben. Allerdings wurde die Schwingungsamplitude oberhalb von 30 Hz laufend verglichen und keine Zunahme gefunden.

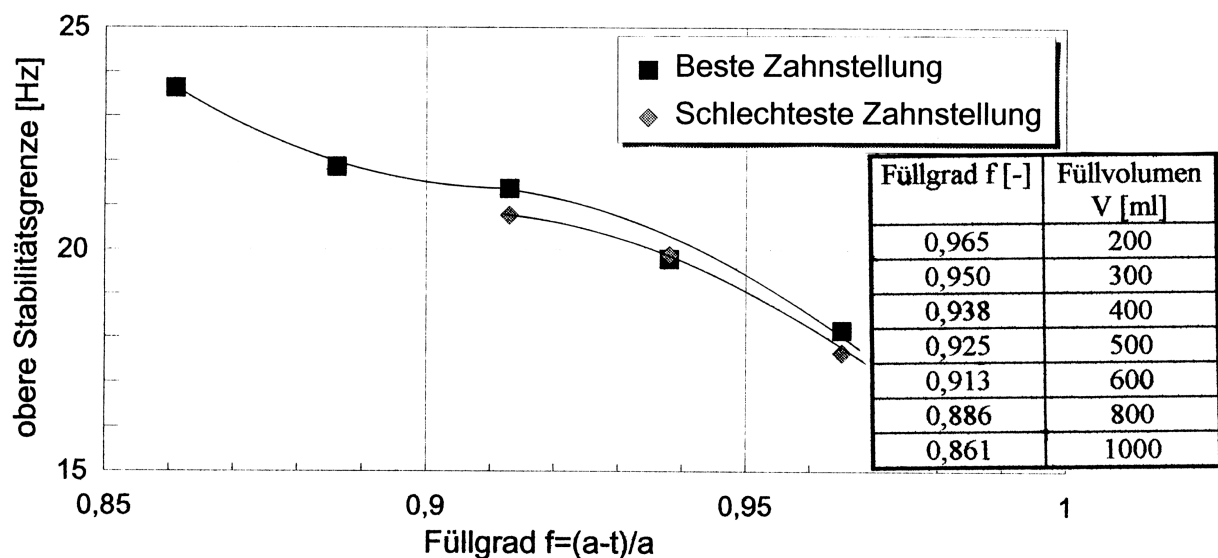


Abbildung 6.4.: Stabilitätsgrenzen bei schlechtester und bester Zahnstellung.
Versuchsflüssigkeit Wasser

6.4. Stabilitätsgrenzen bei verschiedenen Ölvolumina im unteren Ring.

Der nächste Versuchsschritt sollte den instabilen Drehzahlbereich bei verschiedenen Fluorölfüllungen im unteren Ring bei sonst leerem Rotor zeigen. Die Stabilitätsgrenzen liegen bei fast allen Volumina etwas unter denjenigen für den früher gemessenen oberen Ring. Die Ausnahme bei 200 ml Füllvolumen war nicht zu klären. In den folgenden Versuchen sollte Wasser im oberen Ring und Fluoröl im unteren Ring verwendet werden, mit dem Ziel, die Wasserringwelle durch die Ölingwelle zu dämpfen. Die größtmögliche Dämpfungswirkung des Fluoröls im unteren Ring wurde bei der maximalen Ringtiefe von 18,5 mm erwartet, aber so daß die Ölingrwelle gerade noch nicht an den Ölingdeckel anstößt. Dem entspricht ein Ölvolumen von 480 ml; damit wurden die weiteren Versuche durchgeführt, in denen der obere Ring mit Wasser gefüllt wurde.

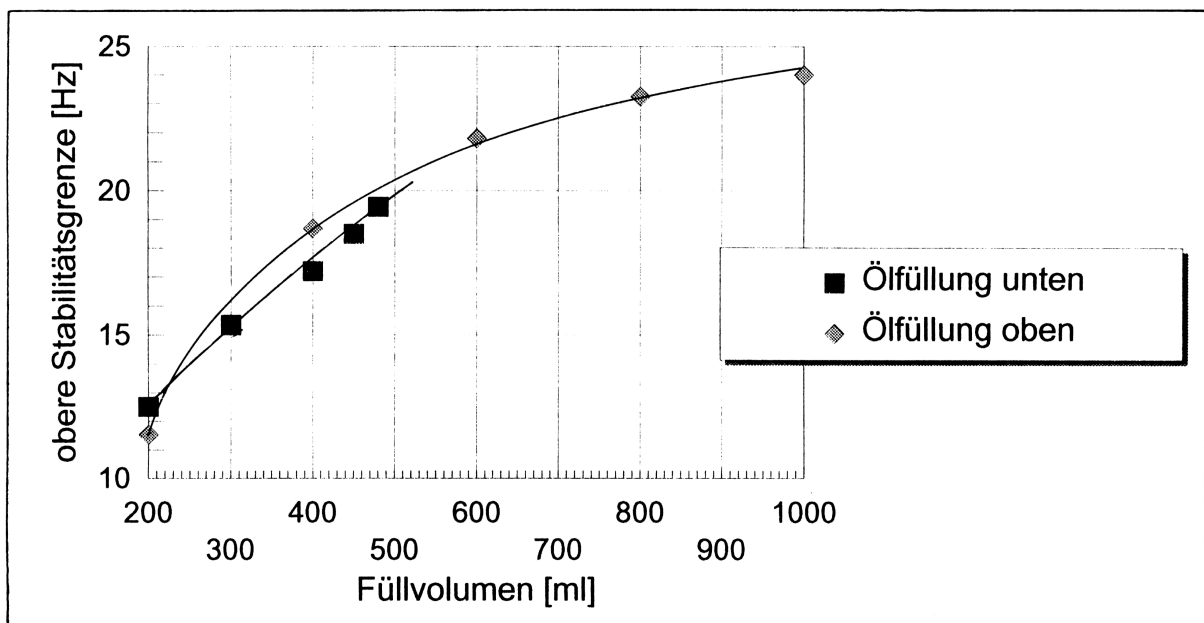


Abbildung 6.5.: Gemessene Stabilitätsgrenzen mit Ölfüllungen im unteren und oberen Ring.

6.5. Zusammenspiel Wasserring -Öling

In Abbildung 6.6. sind zwei Verläufe eingetragen: obere Stabilitätsgrenze des Rotors mit verschiedenen Wasserfüllungen im oberen Ring ohne Öling bzw. mit 480 ml Öl im unteren Ring, und dasselbe zum Vergleich theoretisch. Die gemessenen Drehzahlen, bei denen Instabilität eintritt, unterscheiden sich kaum. Die Versuchsreihe mit Wasser - und Öling

wurden nur bis 700 ml Wasservolumen durchgeführt, weil das Auffangen des Rotors schon laute Geräusche verursachte und das Maschinengestell zum Dröhnen brachte. Messung und Theorie stimmen mit 2,5 Hz Differenz mäßig gut zusammen. Richtet man sich bei der Konstruktion nach der Theorie, liegt man wenigstens auf der sicheren Seite. Die Meßergebnisse der Stabilitätsgrenze legen scheinbar nahe, daß auf die innere Dämpfung des wassergefüllten Rotorsystems ohne weiteres verzichtet werden kann. Tatsächlich aber wird das Instabilitätsgebiet durch das in Kap. 3.2. besprochene Fanglager vermieden, und eine ausreichende Dämpfungsreserve bei Drehzahlen überhalb der oberen Instabilitätsgrenze bei etwa 18 - 25 Hz gefordert. Es zeigte sich bei allen Rechnungen, daß der Öhring eine Dämpfungsreserve bringt.

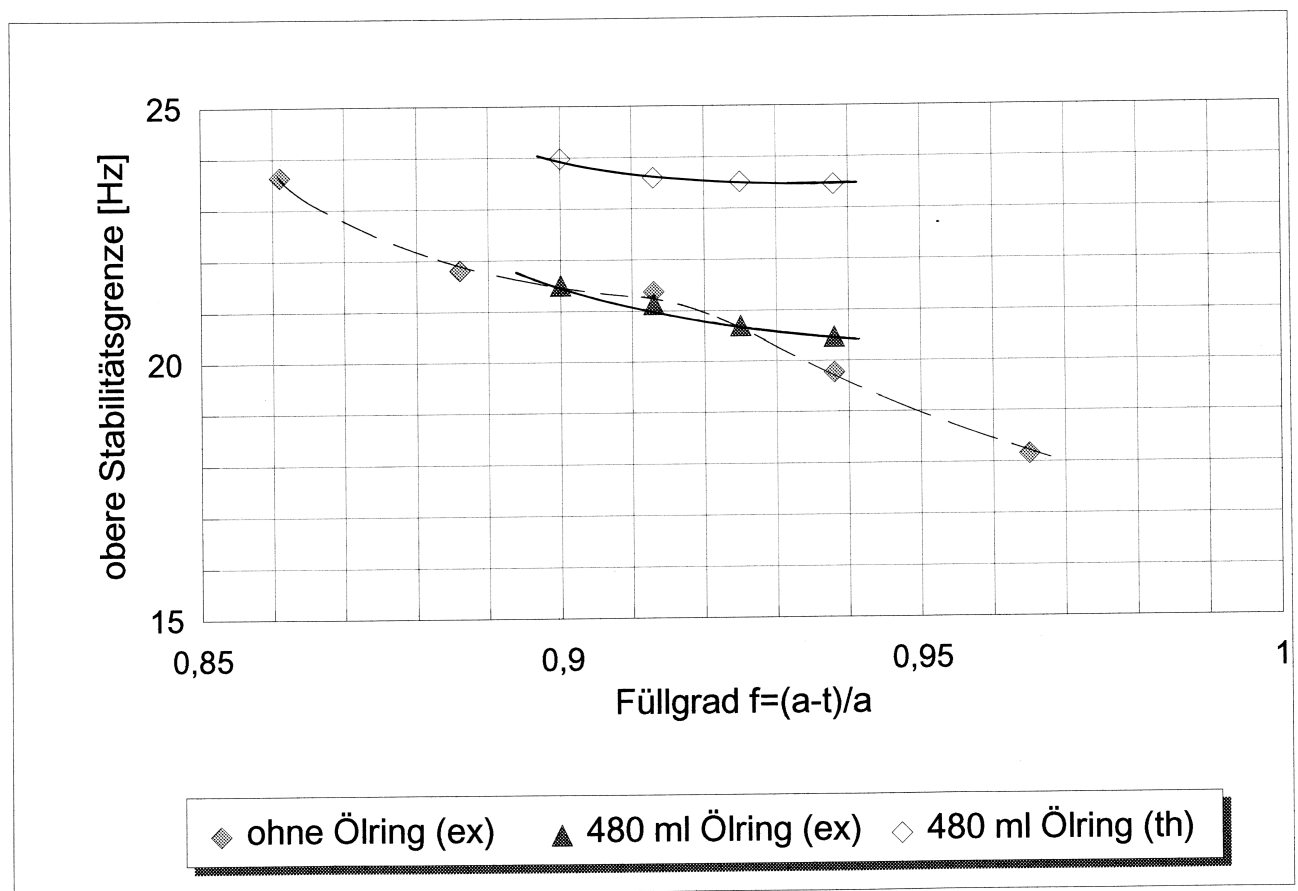


Abbildung 6.6.: Stabilitätsgrenzen des wassergefüllten Rotors mit und ohne innere Dämpfung experimentell (ex) und theoretisch (th) für Wasservolumina von 200 bis 1000 ml

6.6. Zur Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit von Zähigkeit und Dichte der Flüssigkeit zur inneren Dämpfung

In diesem Kapitel wollen wir anhand von Rechenergebnissen darstellen, wie sich die Stabilitätsgrenze eines Rotors mit Wasser- und Ölfüllung ändert, wenn allein die Zähigkeit der Flüssigkeit zur inneren Dämpfung variiert wird. Das zeigen wir für Fluoröl (Dichte $\rho = 1,91 \text{ g/cm}^3$) anhand von Abbildung 6.6., in welcher die obere Stabilitätsgrenzen eines Rotors mit Durchmesser 720 mm für verschiedene Wasserringtiefen im oberen Ring eingetragen sind. Dieser Rotor trägt wie der Versuchsrotor zwei Flüssigkeitsringe und unterscheidet sich von diesem im Wesentlichen nur durch seine Maße. Sie sind der Zeichnung im Anhang zu entnehmen. An Abbildung 6.6. erkennt man, daß es für jede Fülltiefe des Wasserrings ein Optimum der Ölzähigkeit für die innere Dämpfung gibt. Das Optimum verschiebt sich mit abnehmender Fülltiefe zu höheren Werten.

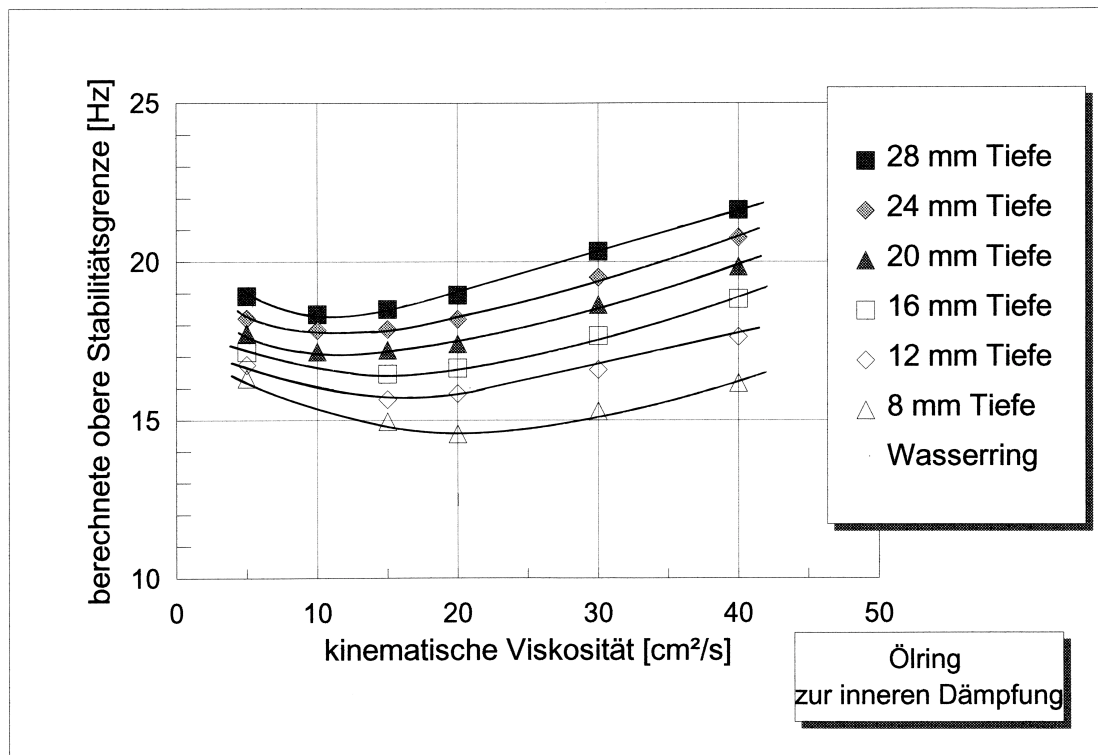


Abbildung 6.7.: Stabilitätsgrenzen für verschiedene Wasserringdftfüllungen bei $\rho = 1,91 \text{ g/cm}^3$ (Fluoröl) in Abhängigkeit der Ölzähigkeit

Zum Vergleich zeigt Abbildung 6.7. die Stabilitätsgrenzen des Rotors mit Durchmesser 720 mm für eine weitere Flüssigkeit, nämlich Silikonöl ($\rho = 0,97 \text{ g/cm}^3$). Wir stellen zunächst fest, daß es wiederum jeder Wasserfüllung ein Optimum der Ölzähigkeit gibt, wo die Stabilitätsgrenze minimal wird. Im Vergleich zu Fluoröl, das doppelt so schwer ist,

liegt die obere Stabilitätsgrenze bei gleicher Wasserfüllung mit Fluoröl um 1 - 2 Hz niedriger als bei Silikonöl. Dieses Rechenergebnis ist interessant, weil es dafür spricht, daß die Wasserringwelle durch die Ölringwelle gedämpft wird. Die Frage, ob es auch für die Flüssigkeitsdichte ein Optimum gibt, wurde nicht weiter verfolgt, da es keine Möglichkeit gibt, die Dichte bei gegebener Zähigkeit zu variieren.

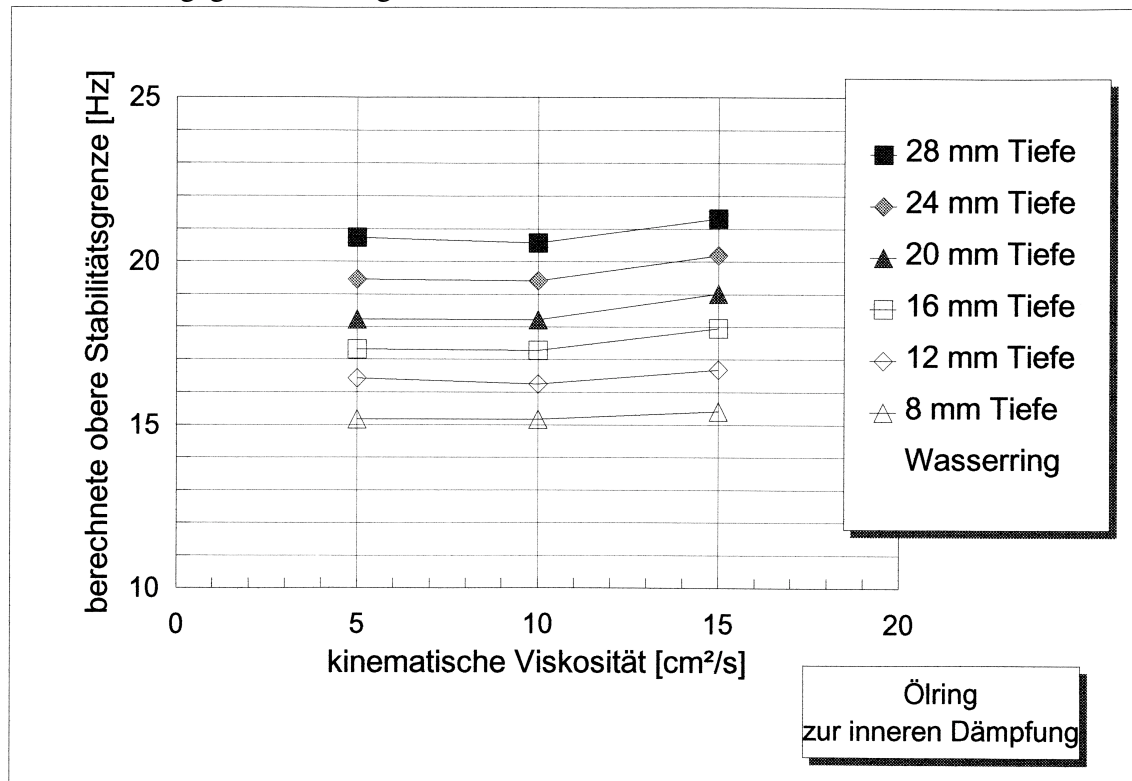


Abbildung 6.8.: Stabilitätsgrenzen für verschiedene Wasserfüllungen bei $\rho = 0,97 \text{ g/cm}^3$ (Silikonöl) in Abhängigkeit der Ölzähigkeit

6.7. Untersuchung der Dämpfung

Wir wenden uns nun der dritten Frage zu. Ob es zu einem Rotor mit Wasser - und Ölring einen Wert der äußeren Dämpfung gibt, bei dem die gefährlichen Eigenmoden des Systems optimal gedämpft werden? Dazu gehören die Eigenmoden:

- 1.) Die Biegeschwingung (Gleichlauferregung) wird beim Fanglagerabriß durch unsymmetrisch wirkende Kräfte angeregt.
- 2.) Die Präzession (Gegenlauferregung) wird ebenfalls bei der Fanglagerumschaltung angeregt. und zusätzlich vermutlich durch die Gasströmung im Rotorkessel, wenn der Rotor unsymmetrisch in seinem Kessel sitzt.
- 3.) Die Eigenschwingungen der Wasserringwelle (Gegenlauf relativ zur Rotordrehrichtung) werden durch die drehzahlsynchrone Unwucht erregt.

6.7.1. Experimentelle Untersuchung der Dämpfung

Um die Dämpfung der Eigenmoden experimentell zu bestimmen, müßten die Methoden der Modalanalyse herangezogen werden. Diese stützt sich auf die simultane Messung der Antwort Q des Systems auf eine Anregung F , bzw. auf die Übertragungsfunktion
$$h(\Omega) = \frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)}$$
. $F(\Omega)$ konnte aus dem Zeitverlauf $f(t)$ unserer Registrierung nicht bestimmt werden, da ein Handhammer mit Beschleunigungsaufnehmer o.ä. nicht zur Verfügung stand.

Deshalb wurde die Antwort des Systems auf eine impulsartige Erregung des Motorpendels mit einem Kunststoffhammer qualitativ dargestellt. Dies hat gegenüber einer Modalanalyse den Nachteil, daß es kaum möglich ist, bei einem Antwortsignal die Amplituden der mitwirkenden Eigenmoden zu trennen, doch kann man die aufgeworfene Frage trotzdem teilweise klären. Dazu betrachten wir Abbildung 6.8..

Dort wollen wir als erstes das Signal der r - Wegmeßsonde - es beginnt in allen Teilbildern auf dem tieferen Niveau - ins Auge fassen. Es ist bei niedrigen Füllständen der Dämpfungskammer (Abbildung 6.8.e)) von der Präzessionsschwingung geprägt, die man an ihrer Schwingungsdauer erkennt; der große Amplitudenwert der r - Koordinate ist auf die große Auslenkung der Motorpendelachse bei niedrigen Dämpfungskammerfüllständen zurückzuführen. Der Präzession ist hierbei eine weitere Schwingung mit nur geringer Amplitude überlagert. Mit zunehmendem Stand des Öls in der Dämpfungskammer wird die Anzahl der Perioden bis zum Abklingen der Präzessionsschwingung größer, d.h. die sie wird schwächer gedämpft. Außerdem ist die Zunahme der Amplitude der zweiten Schwingung zu beobachten; sie bildet mit der Präzessionsschwingung Schwebungen.

Um zu erfahren welche Frequenz die Schwingung hat, die bei großen Füllständen der Dämpfungskammer der Präzession stark überlagert ist, transformiert man das r - Signal des höchsten und niedrigsten Dämpfungskammerfüllstandes in den Frequenzbereich (Abbildung 6.9.). Man erkennt, daß es sich um die Frequenz 18,75 Hz handelt, welche der Biege-eigenfrequenz zuzuordnen ist.

Als zweites betrachten wir in Bild 6.8. das Signal der ϑ - Wegmeßsonde, es beginnt jeweils auf dem oberen Niveau. Gemeinsam ist den fünf Registrierungen das langsame Abklingen des Signals nach der Impuls - Anregung zurück zur Ausgangslage. Vor allem in Teilbild c) ist dabei ein nennenswerter Versatz festzustellen, der nicht weiter verfolgt wurde.

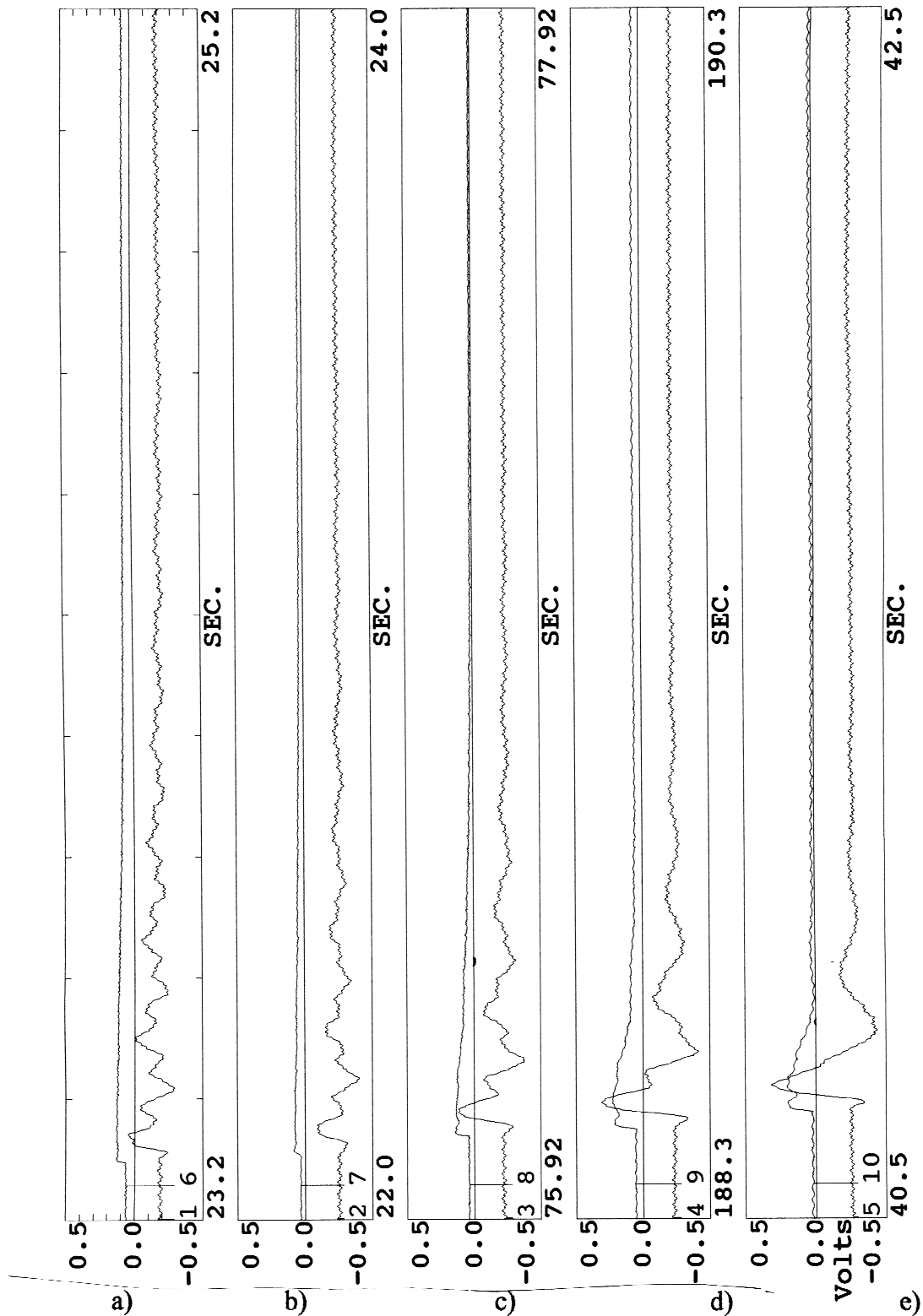


Abbildung 6.9.: Schwingungen in den Koordinaten r und ϑ beim Füllvolumen 500 ml Wasser im oberen Ring und 50 Hz Drehzahl. Registrierungen bei 5 verschiedenen Ständen der auf das Motorpendel wirkenden Dämpfungskammer a) 31 mm; b) 26 mm; c) 21 mm; d) 16 mm; e) 11 mm

Die Dauer des Abklingvorganges und die Größe der Amplitude in der ϑ - Sonde unmittelbar nach der Anregung variieren. Erstere nimmt mit abnehmendem Füllstand in der Dämpfungskammer ab, letztere aber nimmt zu. Auch die Vergrößerung einer drehzahlsynchronen Schwingungsamplitude des Motorpendels mit abnehmendem Füllstand der Dämpfungskammer fällt auf.

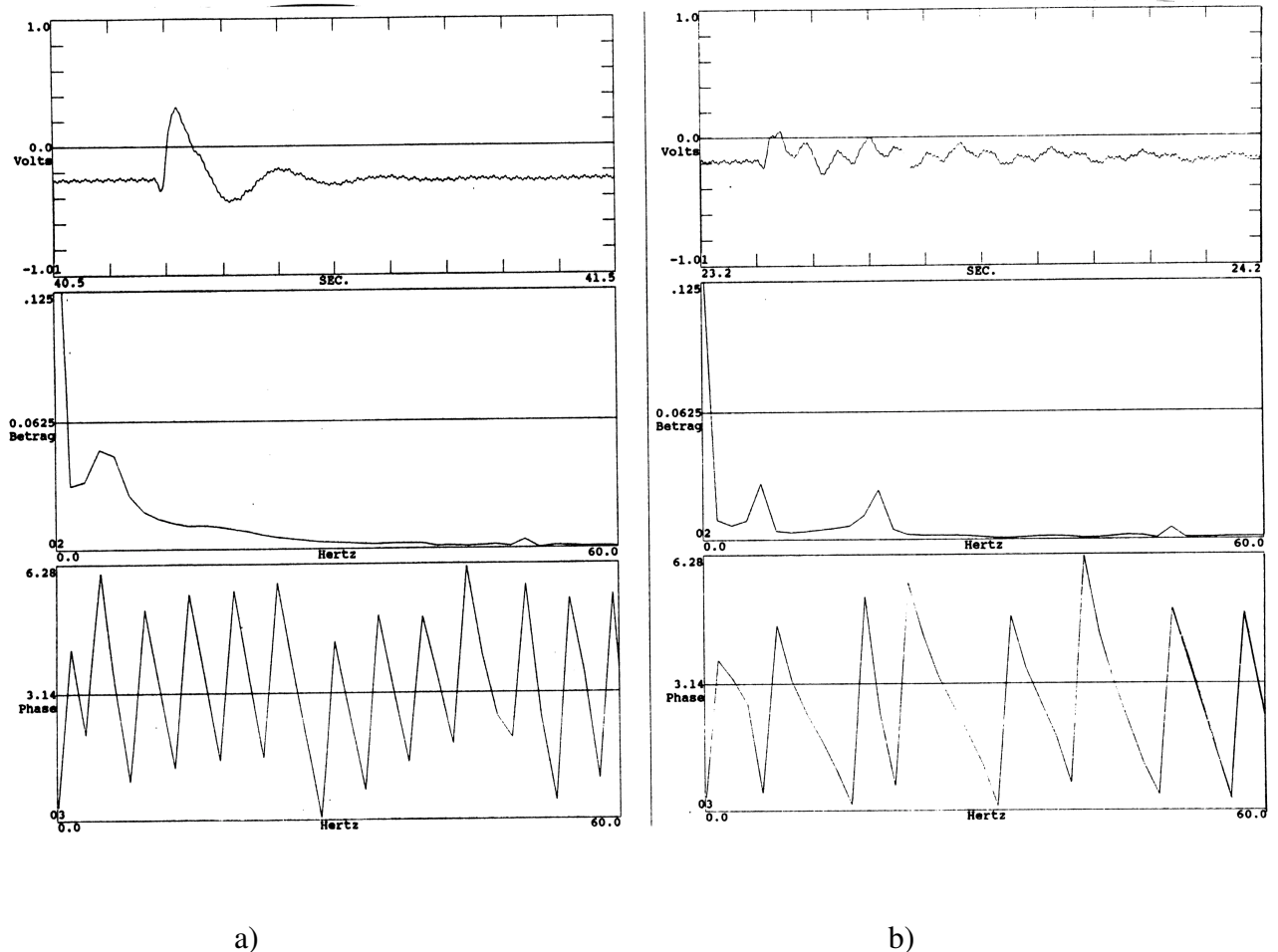


Abbildung 6.10.: Fourieranalyse der r - Amplitude bei den Dämpfungskammerfüllständen a) 11 und b) 31 mm, Wasserringfüllung 500 ml, Drehzahl 50 Hz: Überlagerung der Präzession (ca. 6 Hz) durch die Biegeschwingung (18,75 Hz)

Die *Präzession* des Gesamtsystems wird durch den in e) gezeigten niedrigsten Füllstand in der Dämpfungskammer am besten gedämpft. Ob dies schon das Optimum der Dämpfung für die Präzession ist, kann allerdings noch nicht entschieden werden. Die *Biegeschwingung* wird mit abnehmendem Füllstand der Dämpfungskammer ebenfalls wirksamer ge-

dämpft. Auch bei ihr kann nicht entschieden werden ob mit dem niedrigsten Füllstand der Dämpfungskammer das Optimum der Dämpfung bereits erreicht ist. *Rotorschwingungen*, die durch die *Wasserringwelle* des Gegenlaufes verursacht sind, waren in der Fourieranalyse nicht eindeutig nachweisbar, ihre Dämpfung konnte nicht beurteilt werden.

Das Optimum der Dämpfung kann auf diesem Wege nicht eindeutig gefunden werden, wohl aber eine Tendenz. Zur qualitativen Beurteilung der Dämpfung von Präzession und Biegeschwingung reichen aber die Registrierungen von Bild 6.8. zusammen mit dem Hilfsmittel der FFT - Analyse aus. Ohne FFT - Analyse könnte man hierbei auskommen, wenn sich die Frequenzen der beiden Eigenmoden deutlicher unterscheiden.

Um das Optimum der Dämpfung für die Eigenmoden Rotor - Präzession und - Biegeschwingung zu finden, sind weitere Versuche mit niedrigeren Füllständen der Dämpfungskammer nötig. Sie wurden wegen des hohen Beschädigungsrisikos für Rotorwelle und Lager nicht durchgeführt (vgl. Kap. 6.9.). Wir beschränken uns im Weiteren auf die rechnerische Untersuchung der Dämpfung.

6.7.2. Rechnerische Untersuchung der Dämpfung

Bei der Berechnung der komplexen Eigenwerte durch das im Carus - Institut entwickelte Fortran - Programm werden für jeden Modus die Eigenfrequenz und der Dämpfungsexponent angegeben. Wir betrachten im Folgenden den Dämpfungsexponenten und die Eigenfrequenz von Biegeschwingung (Gleich - und Gegenlauf), Rotor - Präzession (Gegenlauf), Motorpendelschwingung (Gegenlauf) und Wasser - bzw. Ölringwelle (jeweils nur Gegenlauf) in Abhängigkeit vom Dämpfungsmoment (Abbildungen 6.10. bis 6.13.). Das Dämpfungsmoment C_d ist dem Quadrat der Füllhöhe h in der Dämpfungskammer proportional (vgl. Gl. (4.32)). Tabelle 6.2. gibt für jede Füllhöhe das zugehörige Dämpfungsmoment an. Die Werte $h = 11 \text{ mm}$ bis $h = 31 \text{ mm}$ wurden in den Messungen verwendet.

Die Dämpfungsexponenten von Biegeschwingung (GL) und Biegeschwingung (GG) (Abbildung 6.10.) haben etwa bei einem Wert von 400 bzw. 650 Nms/rad ein Maximum von etwa 25/s. Bei darüberhinausgehenden Werten, etwa ab 1100 Nms/rad, nehmen die Beträge der Eigenfrequenzen zu. Man sieht also, daß diese Erhöhung des Dämpfungsmomentes über das Optimum hinaus ähnlich wirkt, wie eine Erhöhung der Steifigkeit der Schraubenfedern am Motorpendel. Das eingefüllte Wasservolumen (200 bzw. 1000 ml) hat kaum Einfluß auf Dämpfungsexponent und Eigenfrequenz.

Dämpfungskammerfüllhöhe h [mm]	Dämpfungsmoment C_d [Nms/rad]
5,0	200
7,0	400
9,0	650
11,0	982
16,0	2080
21,0	3580
25,0	5490
31,0	7800

Tabelle 6.2.: Füllhöhe in der Dämpfungskammer und zugehöriges Dämpfungsmoment

Auch für die Präzession (GG) und die Motorpendelschwingung (GG) (Abbildung 6.11.) findet sich je ein Optimum der Dämpfung; für die Präzession liegt es bei 300 Nms/rad, für die Motorpendelschwingung bei 400 Nms/rad. Diese Eigenmoden sind bei 400 Nms/rad stark gekoppelt. Auch hier ist kaum ein Einfluß der Füllung des Wasserringes festzustellen. Die Präzession ist beim Versuchsrotor stärker gedämpft als die Motorpendelschwingung; bei dem in Kap. 6.6. erwähnten Rotor mit 720 mm Durchmesser ist es umgekehrt, weil dessen Masse und Trägheitsmomente größer sind, und demzufolge die Präzessionseigenfrequenz viel kleiner ist.

Bei der Wasserringwelle (GG) (Abbildung 6.12.) ist keine einheitliche Abhängigkeit des Dämpfungsexponenten vom Dämpfungsmoment erkennbar, während der Dämpfungsexponent bei der Ölingwelle (GG) (Abbildung 6.13.) offensichtlich mit zunehmendem Dämpfungsmoment etwas größer wird. Diese Änderung ist, verglichen mit der Änderung der anderen Eigenmoden, schwach. Die Eigenfrequenzen beider Ringwellen sind weitgehend unabhängig vom Dämpfungsmoment, natürlich nicht vom Füllvolumen im Wasserring.

Die Eigenfrequenz der Wasserringwelle wird mit zunehmender Wasserfüllung kleiner, die der Ölingwelle hat für 600 ml Wasserfüllung ein Minimum. Der Dämpfungsexponent der Ölingwelle hat bei 600 ml Wasserfüllung ein Minimum, der der Wasserringwelle ein Maximum. Beide Eigenmoden sind bei diesem Wert der Wasserfüllung offenbar am besten aufeinander abgestimmt. Die Werte der Eigenfrequenzen und der Dämpfungsexponenten unterscheiden sich nur wenig. Die innere Dämpfung der Ölingwelle beruht auf ihrer Kopplung mit der Wasserringwelle.

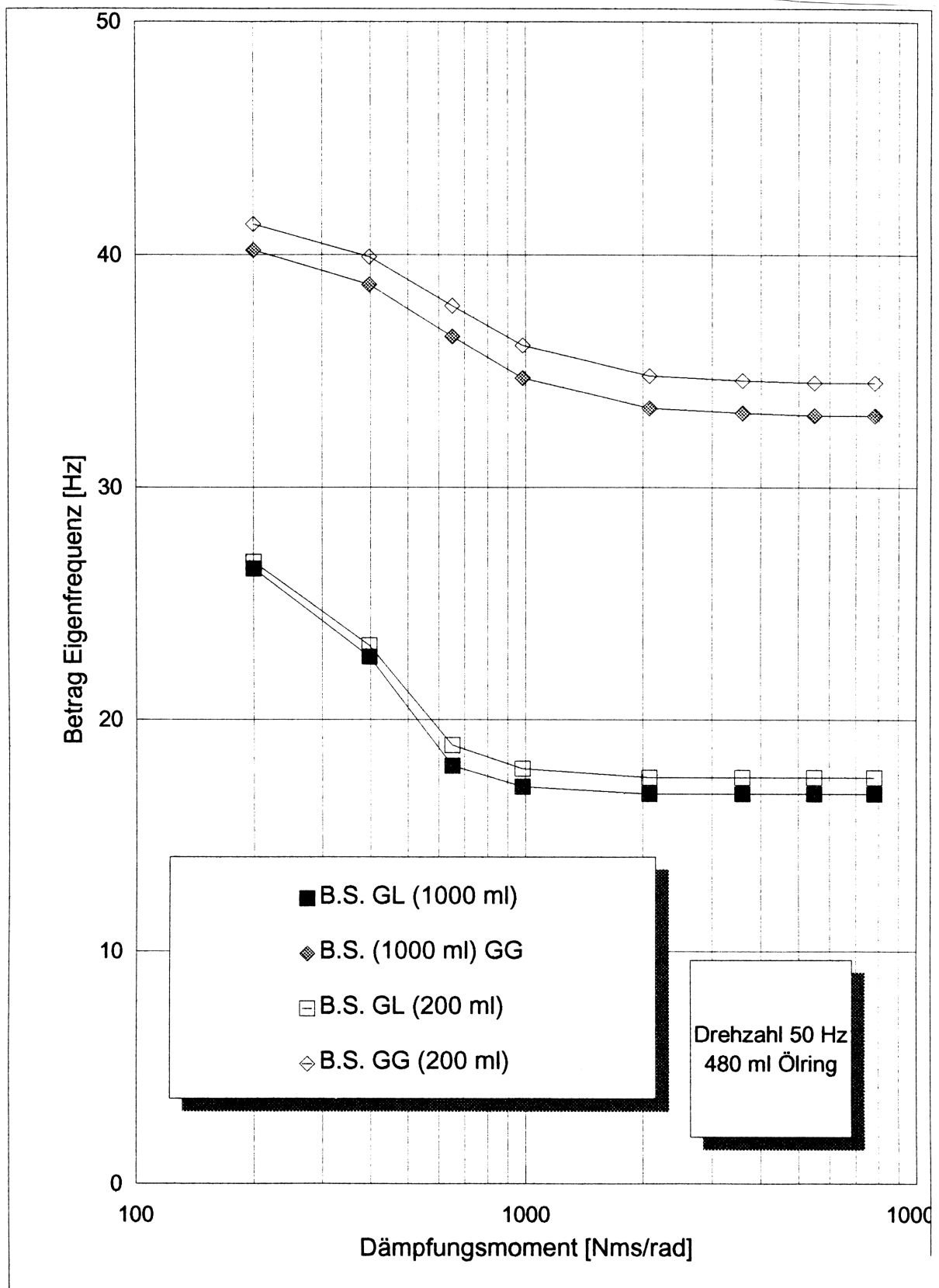


Abbildung 6.11.a: Eigenfrequenz von Biegeschwingung (B.S.) Gleich - (GL) und Gegenlauf (GG) in Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes. Werte jeweils für 200 und 1000 ml Füllung des Wasserringes

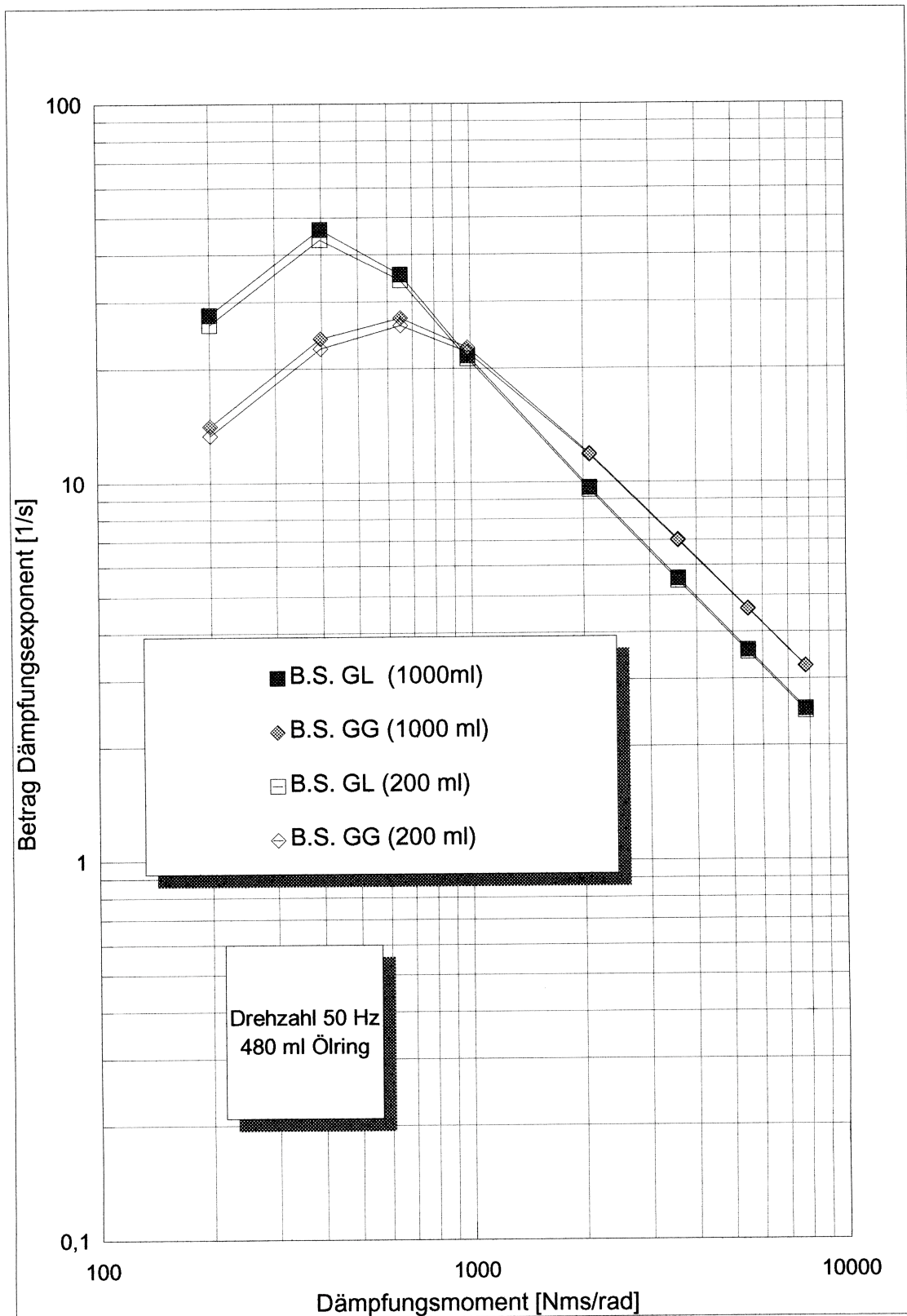


Abbildung 6.11.b: Dämpfungsexponent von Biegeschwingung (B.S.) Gleich - (GL) und Gegenlauf (GG) in Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes. Werte jeweils für 200 und 1000 ml Füllung des Wasserringes

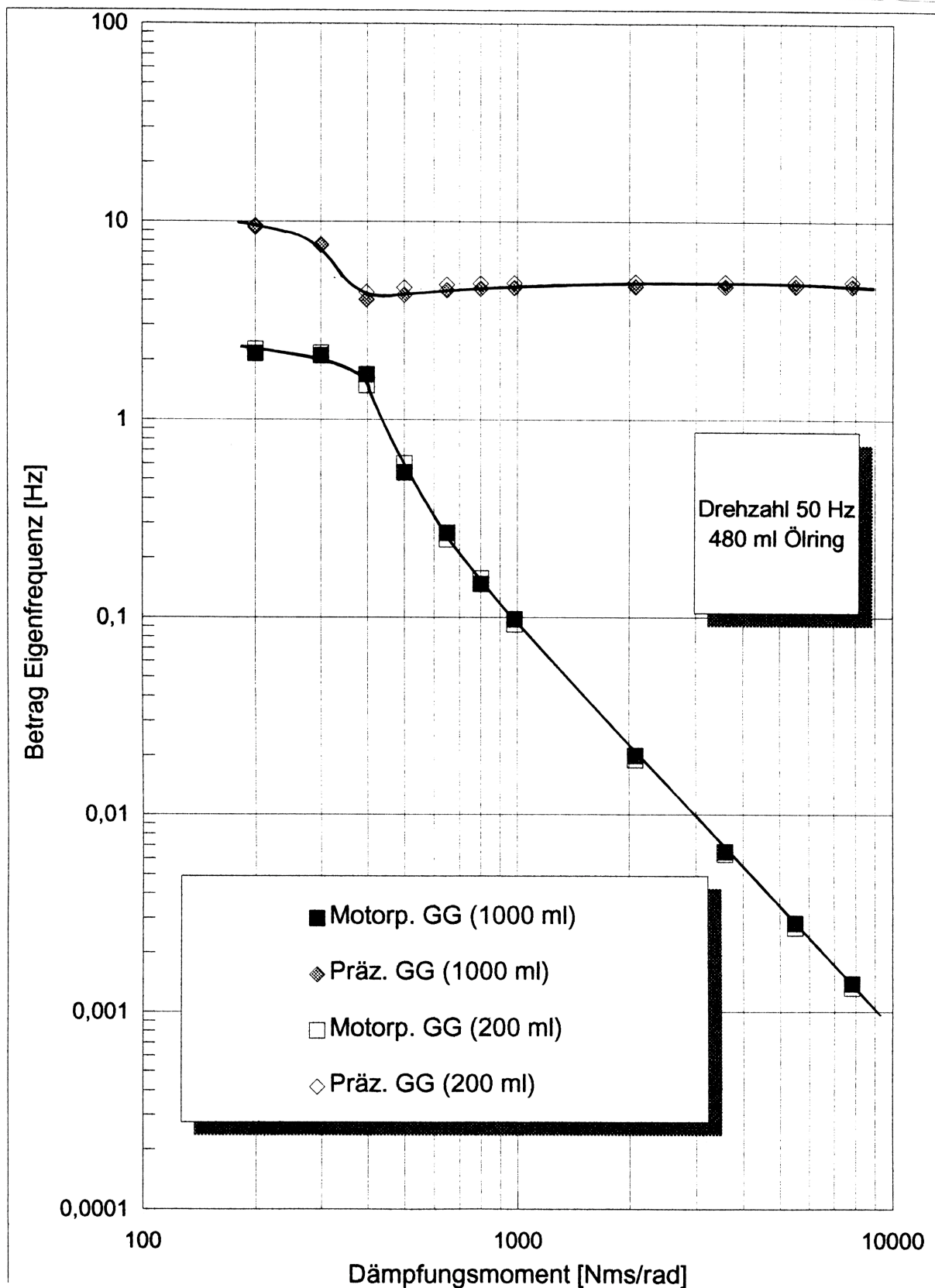


Abbildung 6.12.a: Eigenfrequenz von Rotor - Präzession (GG) und Motorpendelschwingung (GG) in Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes. Werte jeweils für 200 und 1000 ml Füllung des Wasserringes

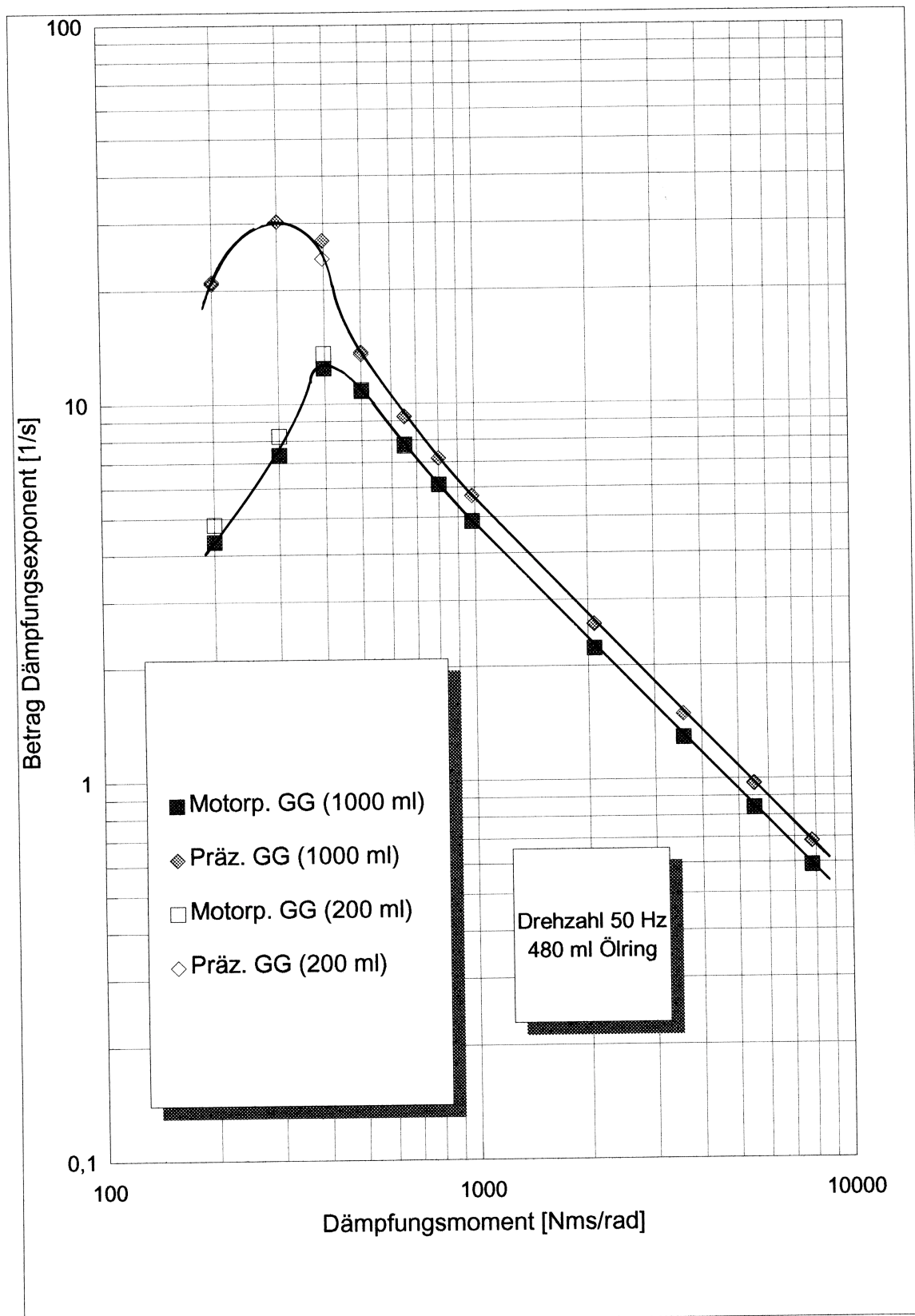


Abbildung 6.12.b: Dämpfungsexponent von Rotor - Präzession (GG) und Motorpendel-schwingung (GG) in Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes. Werte je-weils für 200 und 1000 ml Füllung des Wasserringes

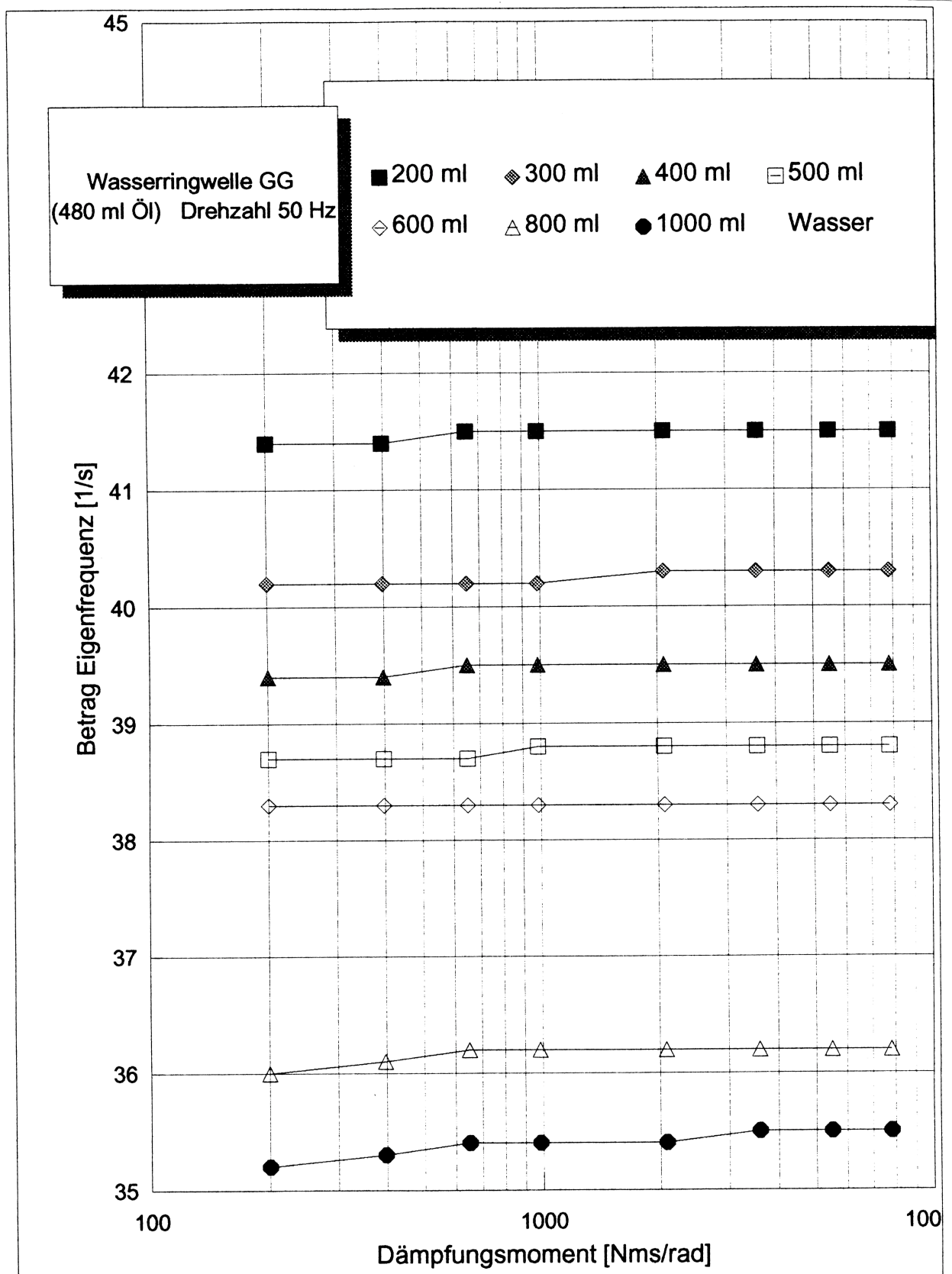


Abbildung 6.13.a: Eigenfrequenz der Wasserringwelle (Gegenlauf) in Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes. Werte für 200, 300, 400, 500, 600, 800 und 1000 ml Füllung des Wasserringes.

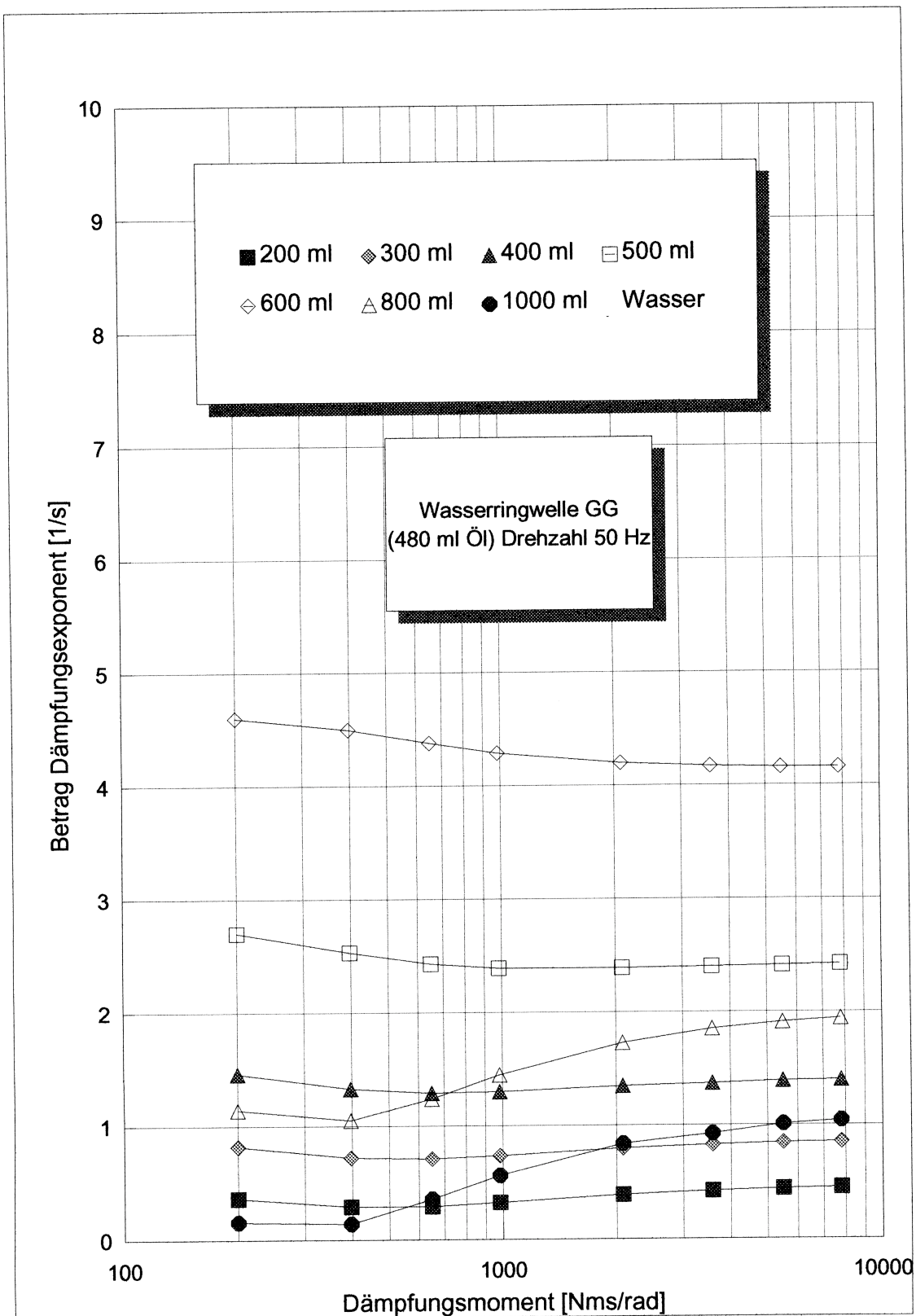


Abbildung 6.13.b: Dämpfungsexponent der Wasserringwelle (Gegenlauf) in Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes. Werte für 200, 300, 400, 500, 600, 800 und 1000 ml Füllung des Wasserringes.

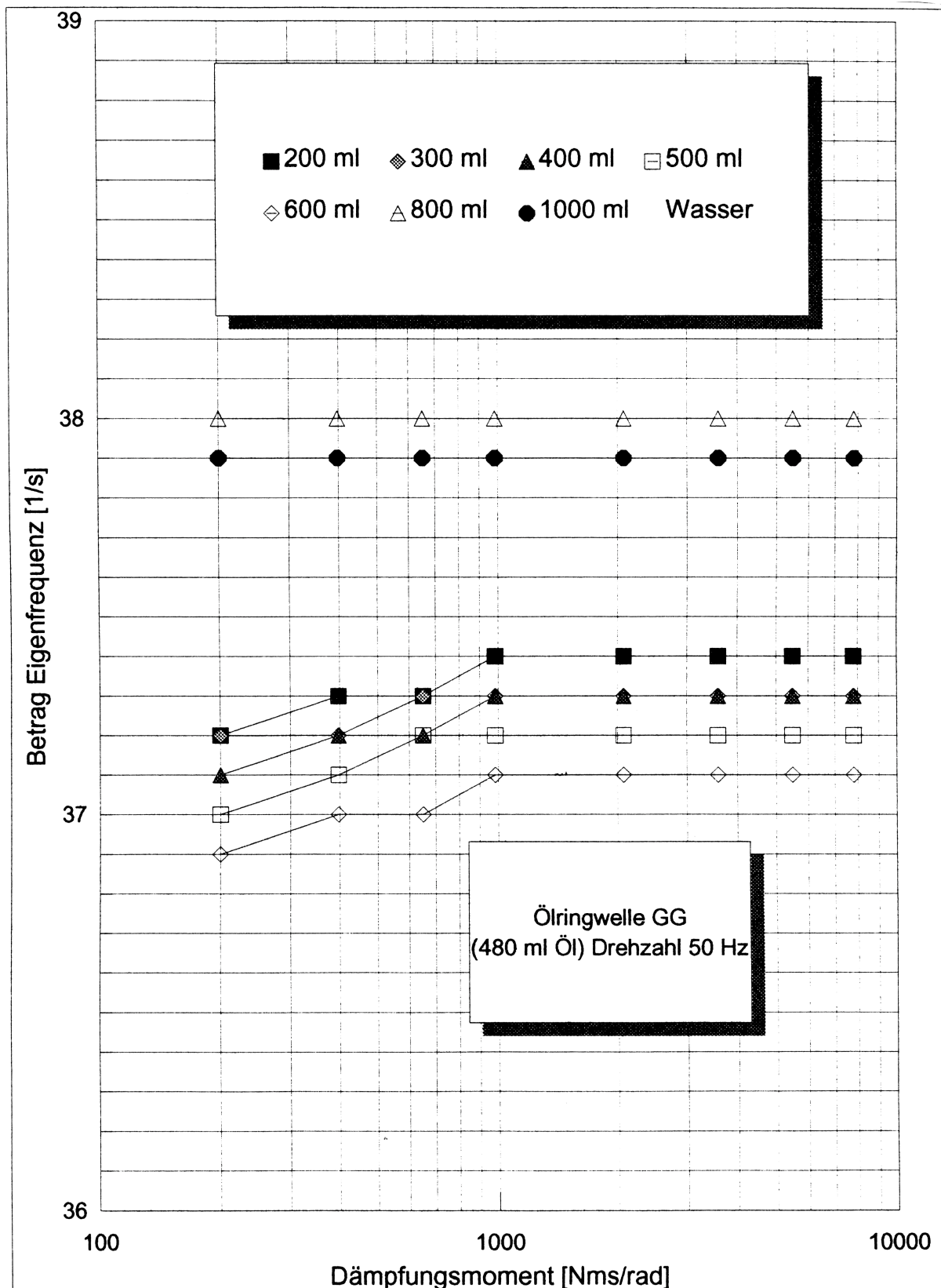


Abbildung 6.14.a: Eigenfrequenz der Ölringwelle (Gegenlauf) in Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes. Werte für 200, 300, 400, 500, 600, 800 und 1000 ml Füllung des Wasserringes.

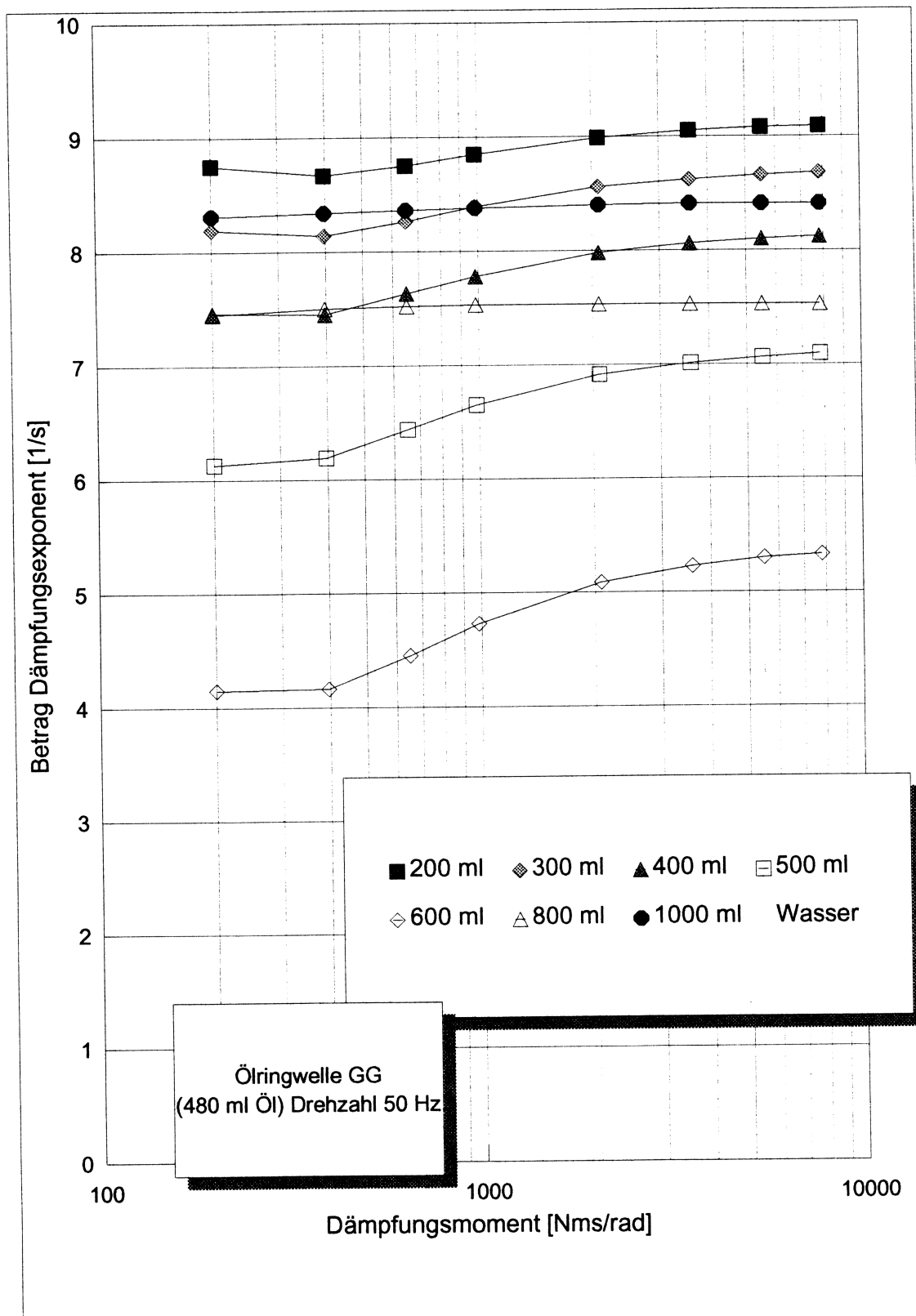


Abbildung 6.14.b: Dämpfungsexponent der Ölringwelle (Gegenlauf) in Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes. Werte für 200, 300, 400, 500, 600, 800 und 1000 ml Füllung des Wasserringes.

6.7.3. Vergleich Messung - Rechnung

Wir können feststellen, daß sich die grundsätzlichen Aussagen von Messung (Abbildung 6.8.) - und Rechnung (Abbildungen 6.10. bis 6.13.) zur Dämpfung der Präzession und Biegeschwingung nicht unterscheiden. Beide Eigenmoden werden nach den übereinstimmenden Ergebnissen im experimentell betrachteten Bereich für abnehmenden Füllstand in der Dämpfungskammer zunehmend gedämpft. Das Optimum der Dämpfung für Präzession und Biegeschwingung konnte experimentell allerdings nicht bestimmt werden. Denn es liegt bei so kleinen Werten der Dämpfungskammerfüllung, für die das Motorpendel des Versuchsstandes nicht ausgelegt ist. Vielmehr wurde es für den viel größeren Rotor $\varnothing 720$ mm konstruiert ist also für den Versuchsrotor überdimensioniert. Die ausgeführten Messungen erlauben aber den Schluß, daß das in der Berechnung der Eigenmoden gefundene Optimum der äußeren Dämpfung hinreichend gut realisiert werden kann, wenn Größe des Rotors und des Motorpendels aufeinander abgestimmt werden.

6.8. Zum Diagramm der Eigenfrequenzen des Rotorsystems

Abbildung 6.15. zeigt die berechneten Eigenfrequenzen des Rotorsystems. Soweit experimentelle Ergebnisse vorliegen, zeigen diese eine gute Übereinstimmung mit der Rechnung (Biegeschwingung und Rotor - Präzession). Für die Biegeeigenfrequenz (Gegenlauf) ist ein Schnittpunkt mit der Wasserringwelle (Gegenlauf) zu erwarten. Beide Eigenmoden sind hier aber stark gekoppelt und weichen aus (Abbildung 6.14.), was auch die Berechnungen mit dem Programm zeigen.

Die Wasserringwelle (gegenlaufend) zeigt ca. zwischen 10 und 25 Hz positive Dämpfungsexponenten, d.h. sie ist angefacht. Etwa in demselben Drehzahlbereich ist die Biegeschwingung (gegenlauferregt) besonders stark gedämpft. Die verbleibenden Eigenmoden der Flüssigkeitsringe sind stark gedämpft, besonders die gleichlaufenden Ringwellen. Allerdings wird ihre Dämpfung mit abnehmender Drehzahl kleiner. Die Rotorpräzession wird mit abnehmender Drehzahl stärker gedämpft, was natürlich bereits in der Konstruktionsphase für dieses Rotorsystem angestrebt wurde.

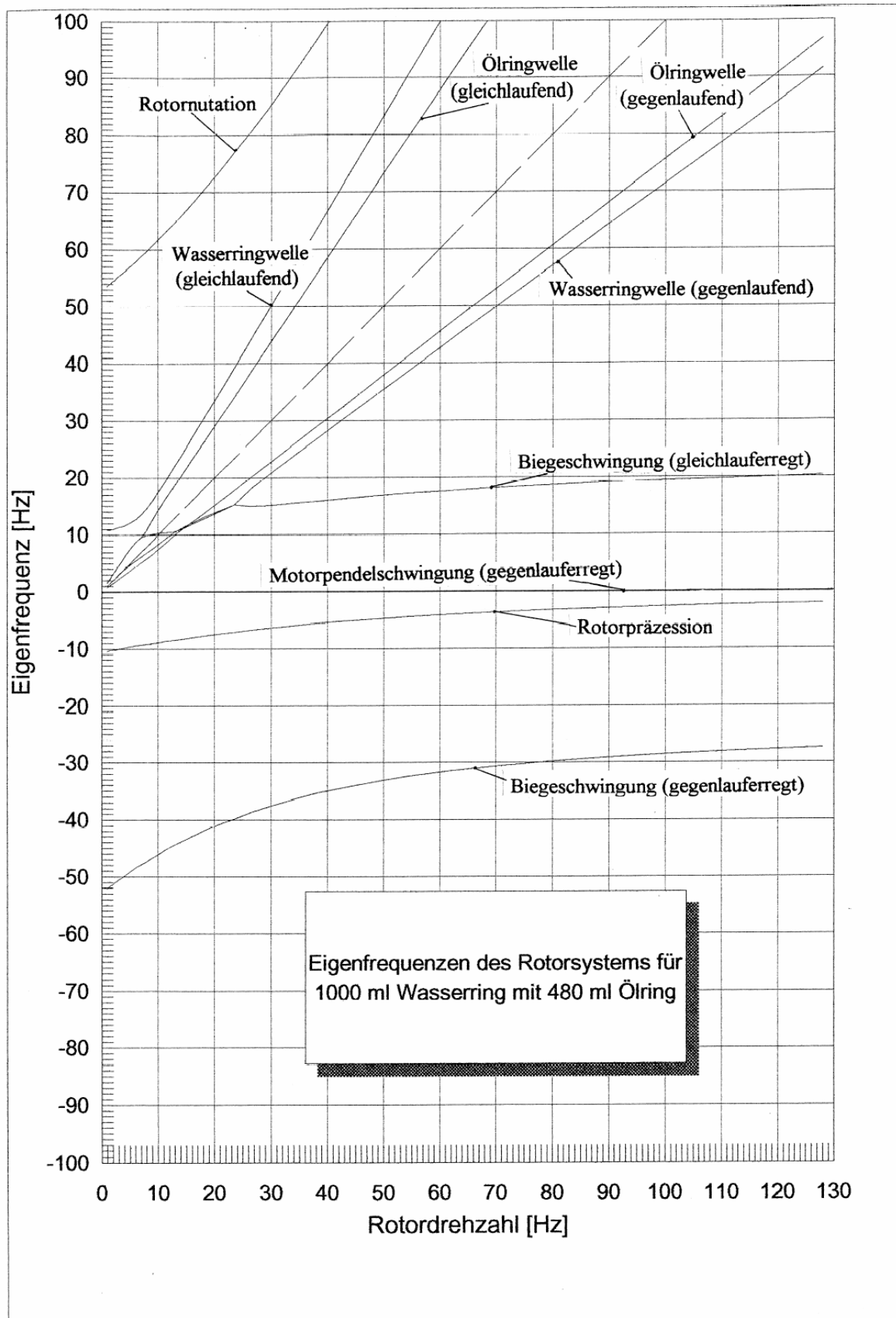


Abbildung 6.15.a.: Eigenfrequenzen des Rotorsystems. Eigenfrequenz der Wasserringwelle für 1000 ml Wasserfüllung mit 480 ml Ölfüllung (berechnet)

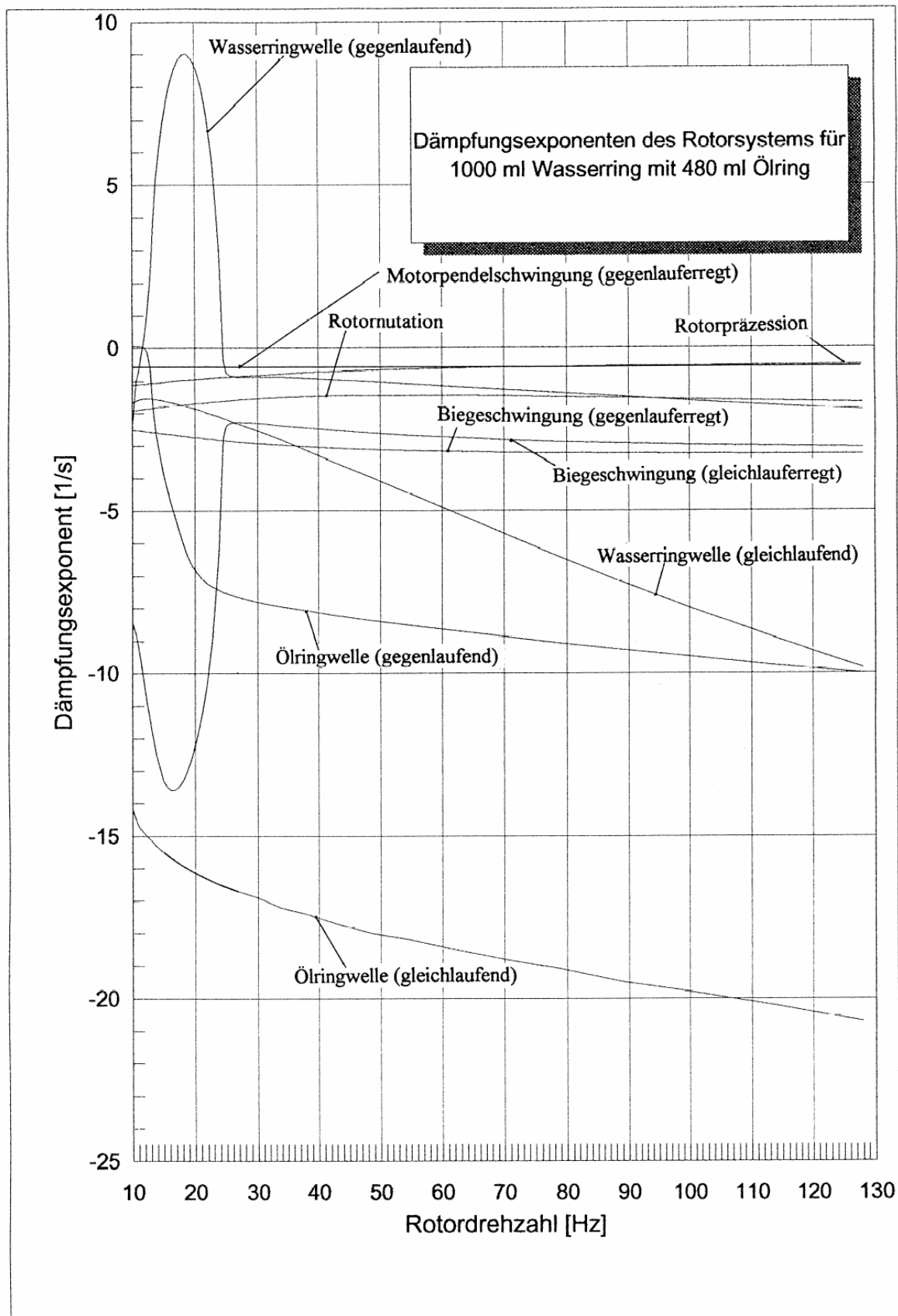


Abbildung 6.15.b.: Dämpfungsexponenten des Rotorsystems. Dämpfungsexponenten der Wasserringwelle für 1000 ml Wasserfüllung mit 480 ml Ölfüllung (berechnet)

6.9. Störfall

Die letzte Versuchsreihe zielte auf die Beurteilung der Dämpfung der Eigenmoden beim Dämpfungskammerfüllstand von 11 mm. Das war der niedrigste Wert im Vergleich zu den vorangegangenen vier Versuchsreihen bei 31, 26, 21 und 16 mm. Dabei wurde der zunächst im Wasserring leere und im Öling mit 480 ml Öl befüllte Rotor auf 50 Hz Drehzahl beschleunigt. Anschließend wurde er in 100 ml - Schritten mit 100 bis 1000 ml Wasser gefüllt, ohne dazwischen abzubremesen. Über das Motorpendel wurde das Rotorsystem leer und bei jeder der 10 Füllungen des Wasserringes mit dem Kunststoffhammer angeregt, und die Schwingungen am Rotor (r - Signal) und am Motorpendel registriert. Nach der Registrierung bei 1000 ml Wasserfüllung wurde der Rotor abgebremst; dabei wurde der Rotor unerwartet instabil, und zwar bei der Drehzahl von 39,2 Hz, und legte sich an den Auffangring an.

Die Instabilität begann in der Rotortranslationsbewegung (r); Rotorkippbewegung (φ) und Motorpendelbewegung (ϑ) folgten nach. Die FFT - Analyse des r - Signals ergab die zur Drehzahl asynchrone Schwingungsfrequenz von 25,0 Hz; diese ist der Wasserringwelle (Gegenlauf) zuzuordnen. In Tabelle 6.3. wird die Instabilität bei 1000 ml Wasser ohne Öling und 31 mm Dämpfungskammerfüllhöhe mit dem Störfall bei 1000 ml Wasser, 480 ml Öling und 11 mm Dämpfungskammerfüllhöhe verglichen. Die Amplituden des Motorpendels waren bei der Instabilität mit 31 mm Dämpfungskammerfüllstand ca. 5 mal kleiner als beim Störfall, was auf die größere Füllhöhe der Dämpfungskammer zurückzuführen ist.

	Instabilität: 31 mm Dämpfungskammerfüll- stand	Störfall: 11 mm Dämpfungskammerfüll- stand
Zunahme der r - Amplitude	<u>Bereich I:</u> von $r_s=10$ auf $40\mu\text{m}$ in 0,78 sec. <u>BereichII:</u> von $r_s=40$ auf $r_s=425\mu\text{m}$ in 0,78 sec.	von $r_s=10\mu\text{m}$ auf $r_s=270\mu\text{m}$ in 5,07 sec.
Anfachungsexponent [1/s]	<u>Bereich I:</u> $\delta=+1,77$ <u>BereichII:</u> $\delta=+3,03$	$\delta = +0,656$
Korrelationskoeffizient für die Anpassung einer expo- nentiellen Anfachung an 2 bis 4 Meßpunkte	<u>Bereich I:</u> CORR = 1,000 <u>BereichII:</u> CORR = 0,997	CORR = 0,999

Tabelle 6.3.: Zur Anfachung beim Störfall

Eine Vermessung der Rotorwelle nach dem Störfall ergab, daß diese verbogen war. Die Verbiegung des Wellenendes betrug etwa $r_{Def,max} = 75 \mu m$ gegenüber 3 -5 μm im neuen Zustand.

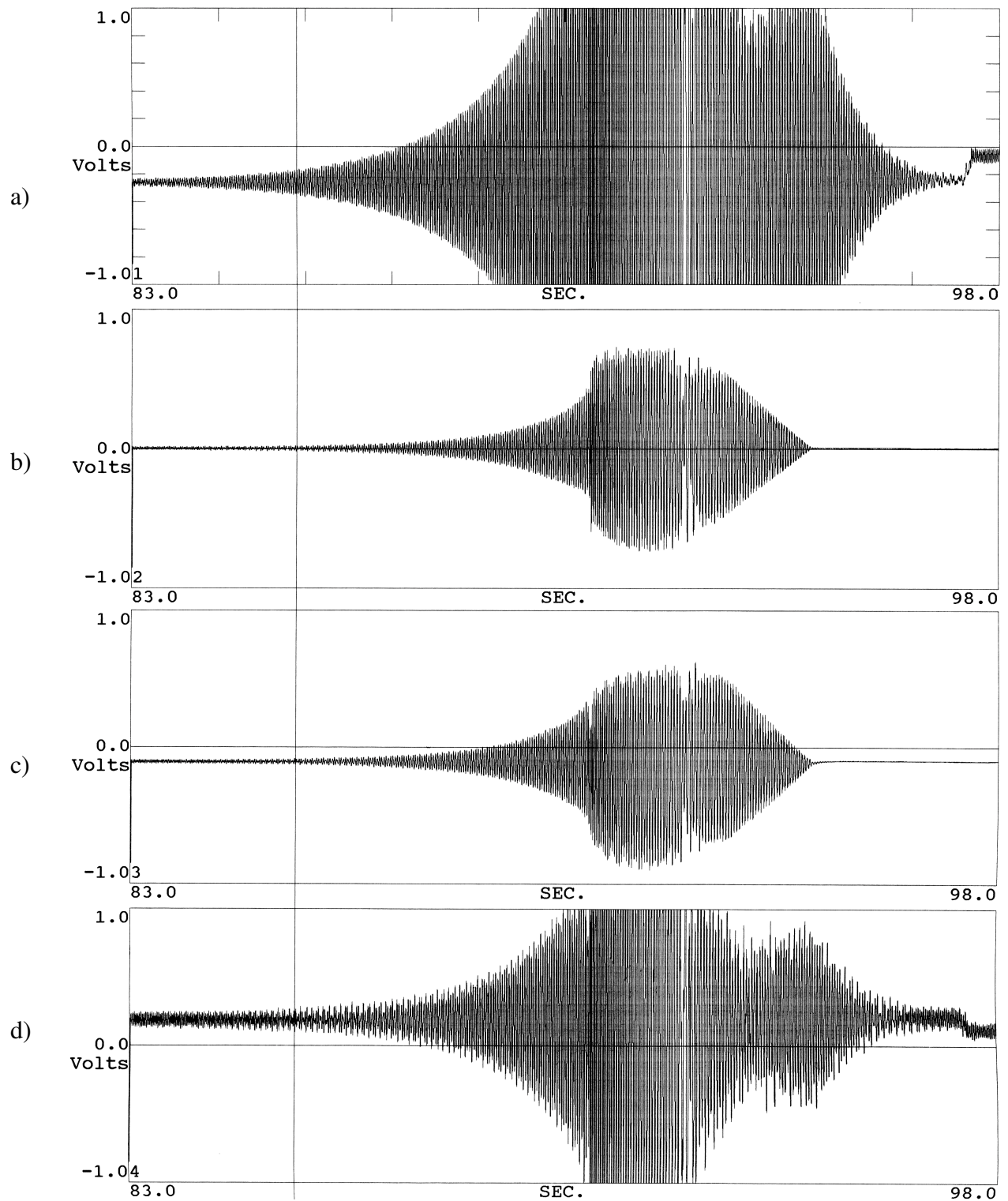


Abbildung 6.16.: Amplitudenverlauf beim Störfall a)r - Sonde b) φ - Sonde
c) ϑ_1 - Sonde d)- ϑ_2 Sonde

Als Auslöser für den Störfall kommt keiner der gefährlichen Eigenmoden: Wasserringwelle (Gegenlauf) Biegeschwingung (Gleichlauf) und Rotorpräzession (Gegenlauf) in Frage, denn diese werden bei 11 mm Dämpfungskammerfüllhöhe besser gedämpft als bei 31 mm; die von der Wasserringwelle verursachte Instabilität hat eine Obergrenze von 23,6 und nicht 39,2 Hz.

In Abbildung 6.8. (Kap. 6.7.1.) konnten wir aber die Zunahme der Amplitude einer drehzahlsynchronen Schwingung des Motorpendels mit abnehmender Füllhöhe der Dämpfungskammer feststellen. Diese Schwingung kann möglicherweise die Wasserringwelle angeregt haben, die dann bei unerwarteter Drehzahl die Instabilität verursachte.

7. Ausblick

In Kapitel 6.2. wurden gemessene und berechnete Werte der oberen Instabilitätsgrenze des Rotors ohne innere Dämpfung für die Flüssigkeiten Wasser, Glycerin, und fluoriertes Öl verglichen. Bei Glycerin und fluoriertem Öl stimmten Messung und Rechnung recht gut überein, bei Wasser ergab sich der stark auffallende Unterschied für die Stabilitätsgrenze von 14 Hz. Er ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß die Rechnung von laminarer Ringkanalströmung ausgeht, während bei den Versuchen stattdessen turbulente Strömung geherrscht haben kann. Ein wesentliches Kennzeichen von turbulenter gegenüber laminarer Strömung sind die wesentlich erhöhten Reibungsverluste. Flüssigkeitsreibung in tangentialer Richtung an der Wand des Flüssigkeitsrings hatten wir aber als günstig für den stabilen Betrieb eines flüssigkeitsgefüllten Rotors mit äußerer Dämpfung erkannt. Unter der Bedingung von turbulenter Strömung in den Versuchen ist dies eine Erklärung für den Unterschied zwischen Messung und Rechnung. Diese ist durchaus möglich, da die Wellenbewegung an der Grenze zur Instabilität schon eine endliche Amplitude hat und damit die Strömungsgeschwindigkeiten im Ringkanal von 0 verschieden sind. Es kann künftige Aufgabe sein, das Geschwindigkeitsprofil an der Außenwand des Flüssigkeitsrings zu untersuchen und zu prüfen, ob günstige Voraussetzungen für das Einsetzen der Turbulenz vorliegen. Dazu könnten die am Carus - Institut entwickelten Formeln für die laminare Bewegung der Flüssigkeit im rotierenden Ring herangezogen werden.

Bei allen Experimenten mit innerer Dämpfung mußte der Versuchsrotor durch den vom Öhring verursachten instabilen Drehzahlbereich beschleunigt werden. Dies wurde auf zwei Arten versucht. Einerseits wurde der Rotor mit aufgeschobenem Fanglager langsam durch den instabilen Drehzahlbereich beschleunigt, und dieses dann abgezogen. Beim Abziehen des Fanglagers wurden die gefährlichen Eigenmoden Biegeschwingung (Gleichlauf) und Rotorpräzession (Gegenlauf) angeregt und der Rotor legte sich bei der hohen Drehzahl von 35 Hz unter lauten Geräuschen an den Auffangring an. Andererseits wurde der Versuchsrotor, ohne das Fanlager zu verwenden, mit großer Beschleunigungsrate durch den instabilen Bereich gerissen. Das war möglich, da der Antiebsmotor des Versuchsstandes relativ zu dem geringen Massenträgheitsmoment des Versuchsrotors sehr stark war. Auch hier legte sich der Rotor an den Auffangring an, allerdings bei geringeren Drehzahlen von 10 - 25 Hz. Die Anlegegeräusche waren hier weniger hart, weswegen der Rotor bei den meisten Versuchen mit innerer Dämpfung auf die soeben beschriebene zweite Art beschleunigt wurde. Am günstigsten ist es natürlich, wenn der Rotor die Instabilität ohne Anlegen passiert. Das könnte beispielsweise erreicht werden, indem das mechanische Fanglager, welches beim Abziehvorgang die gefährlichen Eigenmoden

anregt, durch ein berührungsloses, magnetisches Lager ersetzt wird. Dieses müßte die erforderliche hohe Steifigkeit von 10^7 N/m wie das Fanglager haben. Sie könnte für ein Magnetlager durch eine geeignete elektronische Regelung, die von der Rotoramplitude r gesteuert wird, erzielt werden. [17]

Literaturübersicht

- [1] Biezeno, C. B., Grammel, R., Technische Dynamik, Springer - Verlag, Berlin 1971 (Reprint)
- [2] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Taschenbuch der Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft, 23. Auflage, Leipzig 1987
- [3] Gasch, R., Pfützner, H., Rotordynamik, Springer - Verlag, Berlin 1975
- [4] Grammel, R. Der Kreisel, Springer - Verlag, Berlin 1950
- [5] Gross D., Hauger W., Schnell, D., Technische Mechanik I-III, 2. Auflage, Springer - Verlag Berlin 1988
- [6] Hendricks, S.L., Morton, J.B., Stability of a Rotor Partially Filled With a Viscous Incompressible Fluid. In: Journal of Applied Mechanics, Dec. 1979, Vol. 46, S. 913-918
- [7] Koehler, R., unveröffentlichtes Manuskript
- [8] Koehler, R., unveröffentlichtes Manuskript, 1984
- [9] Kuipers, M., On the Stability of a Flexibly Mounted Rotating Cylinder Partially Filled with Liquid. In: Applied Scientific Research, Section A, Vol. 13 (1964), S. 121 - 137.
- [10] Kollmann, F.G., Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die kritischen Drehzahlen flüssigkeitsgefüllter Hohlkörper. In: Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 28 (1962), Nr. 4, S. 115 - 123 und (1962) Nr. 5, S. 147 - 153.
- [11] Lichtenberg, G., Die Schwingungen eines flüssigkeitsgefüllten Rotors unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung, Braunschweig, Technische Universität, Dissertation 1981.
- [12] Magnus, K., Kreisel - Theorie und Anwendungen, Industrie - Druck - Verlag Göttingen, 1965

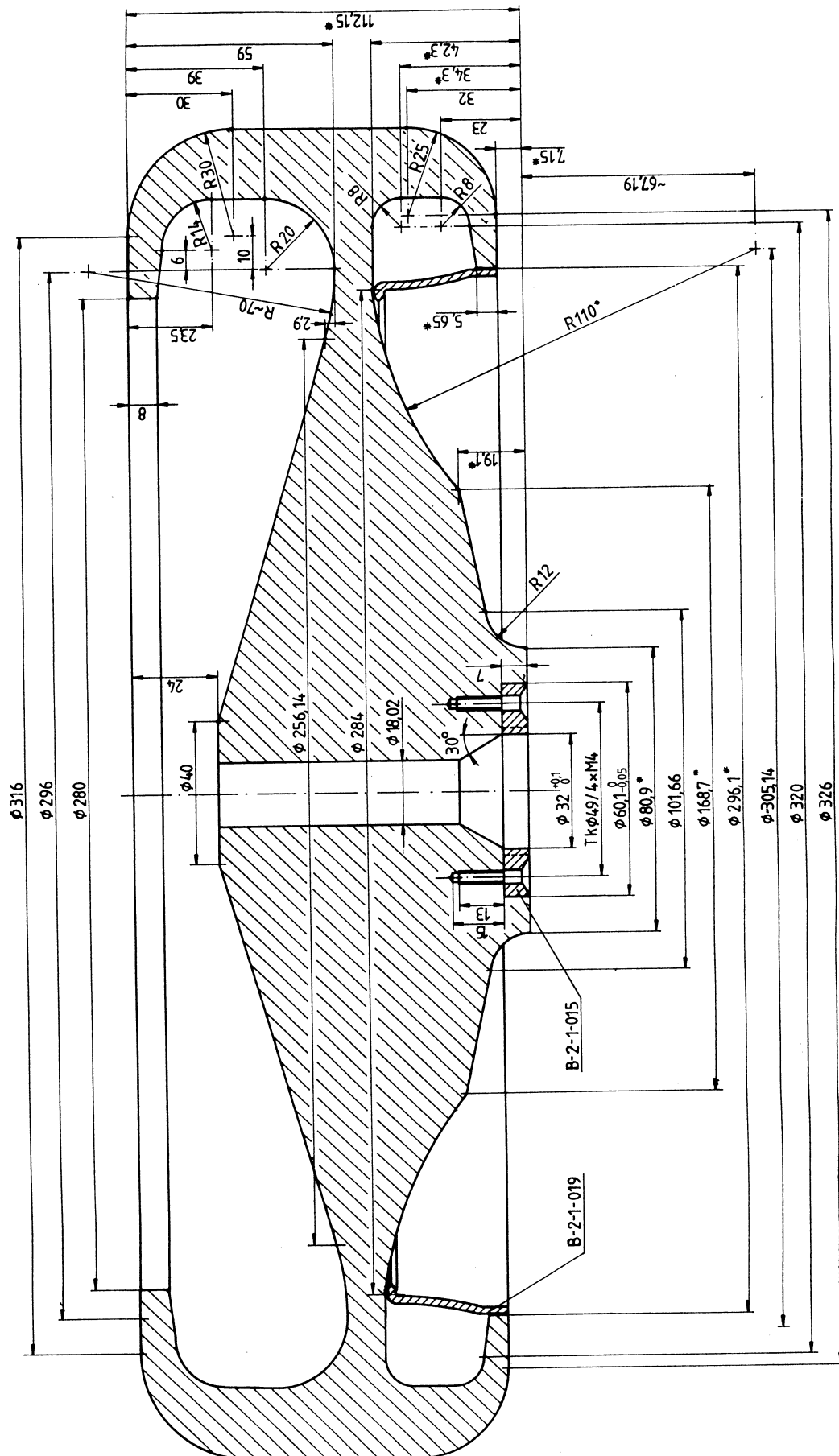
- [13] Preussner, C., Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten eines Rotors, der einen zylindrischen, in Umfangsrichtung segmentierten, flüssigkeitsgefüllten Hohlzylinder trägt.
Darmstadt, Technische Hochschule, Dissertation 1988
- [14] Schmidt, E., Das Gleichgewicht eines Wasserringes mit freier Oberfläche in einem rotierenden Hohlkörper. Z. angew. Math. Phys. 9b (1958) Nr. 5/6 S. 622 - 627
- [15] Spurk, J., Technische Strömungslehre, 2. Auflage, Springer - Verlag, Berlin 1989
- [16] Stanski, K., Glienecke, Bauelemente der Lagerdämpfung, Karlsruhe, Technische Hochschule, Dissertation 1975
- [17] Ulbrich, H. Dynamik und Regelung von Rotorsystemen, Fortschr. Ber. VDI Reihe 11 Nr. 86. Düsseldorf: VDI - Verlag 1986
- [18] Weizel, W., Lehrbuch der theoretischen Physik, 2. Auflage, Erster Band, Springer - Verlag, Berlin 1955
- [19] Wolf, J. A., Jr.: Whirl Dynamics of a Rotor Partially Filled With Liquid. In J. Appl.Mech. (Transactions of the ASME) vol. 35 (1968), S. 676 - 682.
- [20] Wölfel, H., Umdruck zur Vorlesung Maschinendynamik, Darmstadt, Technische Hochschule 1991
- [22] Fa. $\mu - \varepsilon$ Meßtechnik, Ortenburg, Firmenprospekt des Wegmeßsystems
- [23] Fa., Schott, Hofheim, Ubbelohde - Viskosimeter, Bedienungsanleitung
- [24] D`Ans, J., Lax, E., Taschenbuch für Physiker und Chemiker, Springer - Verlag, Berlin 1943

1. Abbildungen

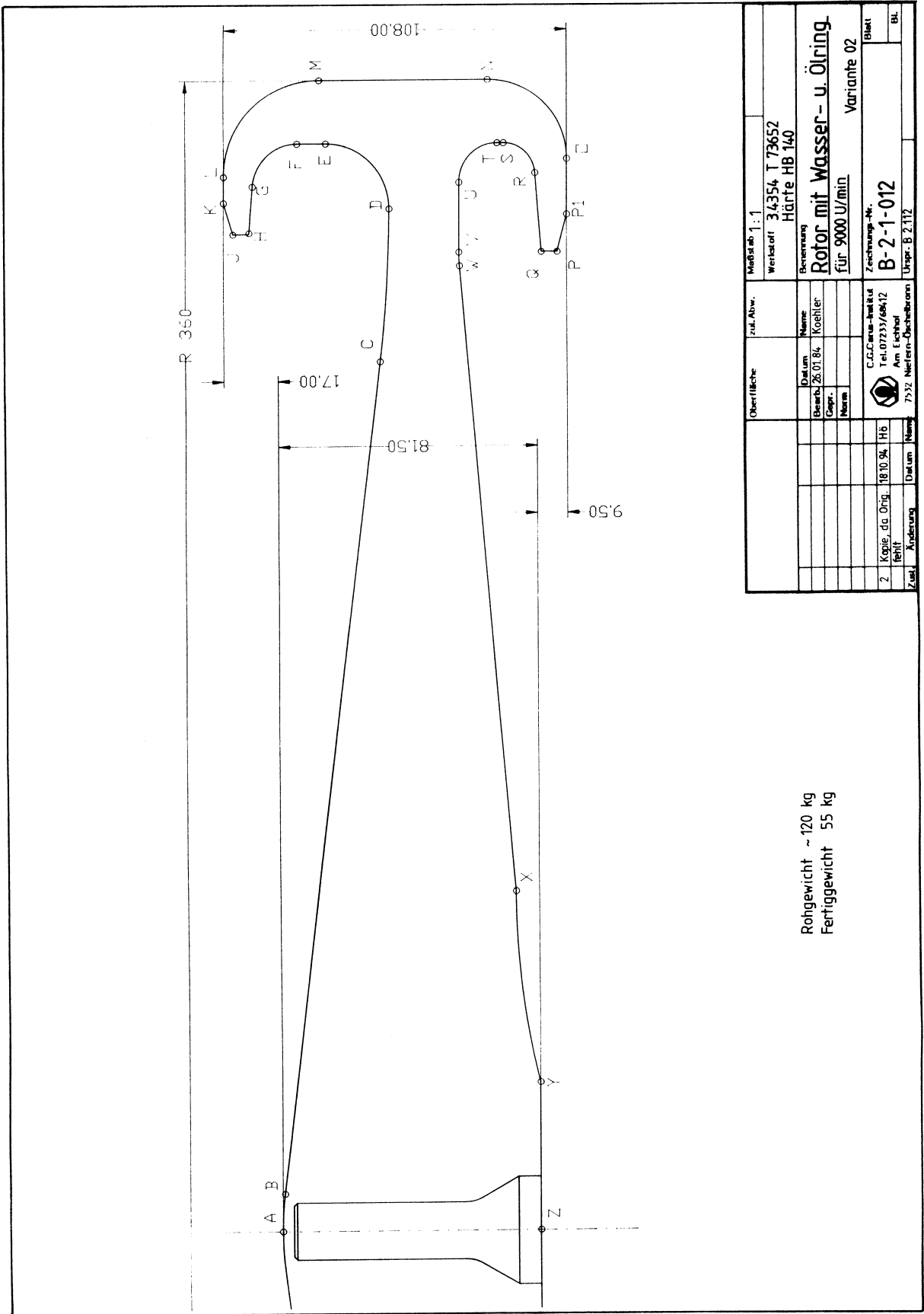
Versuchsrotor Ø 336 mm, Abmessungen.....	121
Standardrotor Ø 720 mm, Abmessungen (informativ, nicht Teil dieser Arbeit).....	122
Versuchsrotor Ø 336 mm, Zusammenhang zwischen Füllvolumen und Füllgrad (oberer Flüssigkeitsring, „Wasserring“).....	123
Versuchsrotor Ø 336 mm, Zusammenhang zwischen Füllvolumen und Füllgrad (unterer Flüssigkeitsring, „Ölring“).....	124
Versuchsstand, Ansichten Maschinengestell (ohne Abmessungen).....	125

2. Tabellen

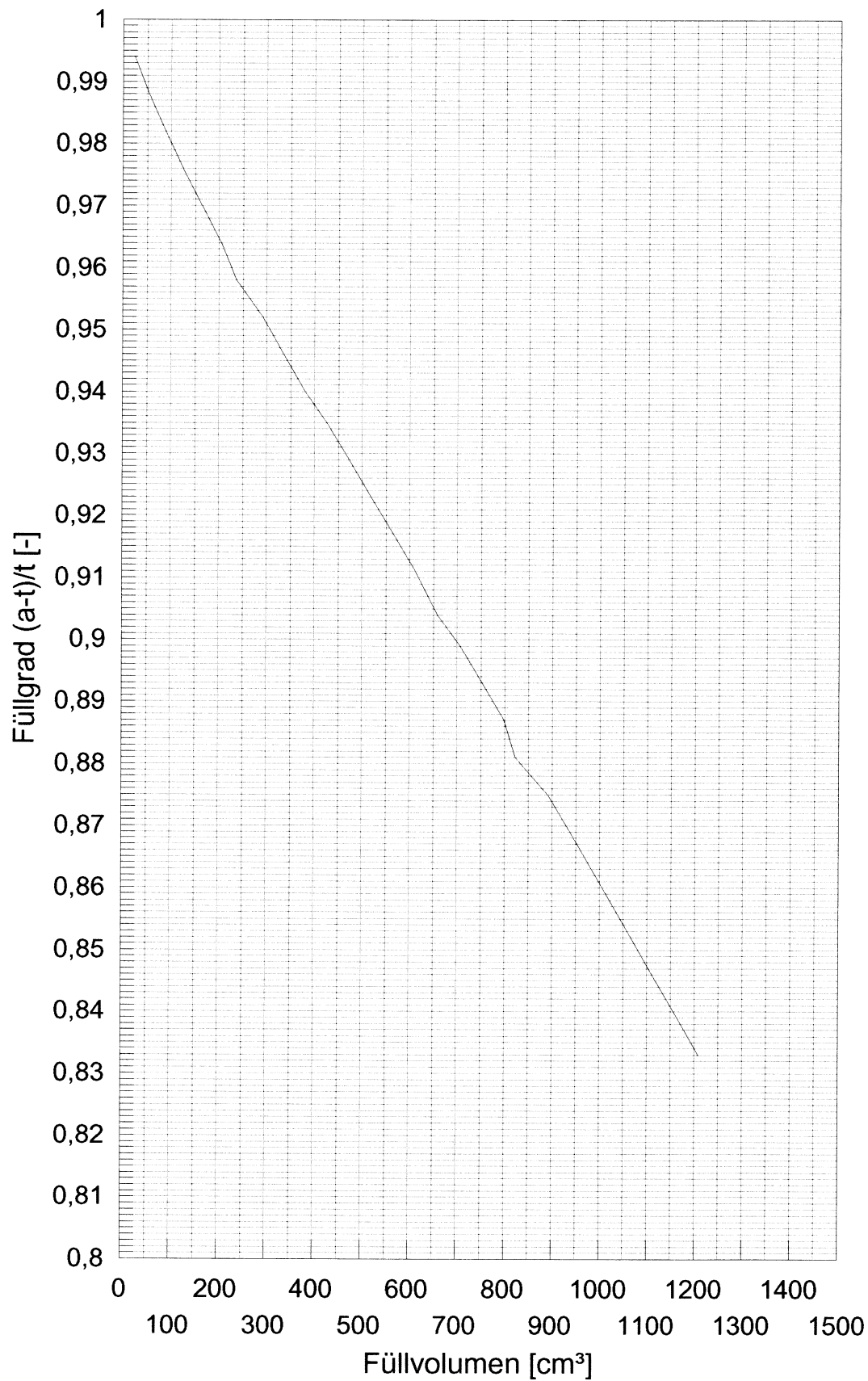
Obere Stabilitätsgrenze Versuchsrotor für verschieden zähe Flüssigkeiten und verschiedene Füllgrade im oberen Ring, ohne innere Dämpfung, experimentell, zu Abbildung 6.2.....	126
Obere Stabilitätsgrenze [Hz] Versuchsrotor für verschiedene Wasserfüllungen im oberen Ring, ohne innere Dämpfung bei der Zahnstellung mit der größten Amplitude bei kritischer Drehzahl experimentell, zu Abbildung 6.4.....	127
Obere Stabilitätsgrenze [Hz] Versuchsrotor für verschiedene Fluorölfüllungen im unteren Ring experimentell, zu Abbildung 6.5.....	128
Obere Stabilitätsgrenze [Hz] Versuchsrotor für verschiedene Wasserfüllungen im Wasserring; Dämpfungöl 480 ml im unteren Ring experimentell, zu Abbildung 6.6...	129
Stabilitätsgrenzen für verschiedene Fluorölzähigkeiten berechnet, zu Abbildung 6.3	130
Stabilitätsgrenzen für verschiedene Silikonölviskositäten, berechnet, zu Abbildung 6.3.....	131
Maximale Amplituden Spitze-Spitze bei Fanglagerumschaltungen mit verschiedenen Fluorölfüllungen im Ölring (experimentell).....	132
Tabelle Zusammenhang Füllgrad – Füllvolumen (oberer Ring Versuchsrotor).....	133



Versuchsrotor Ø 336 mm, Abmessungen



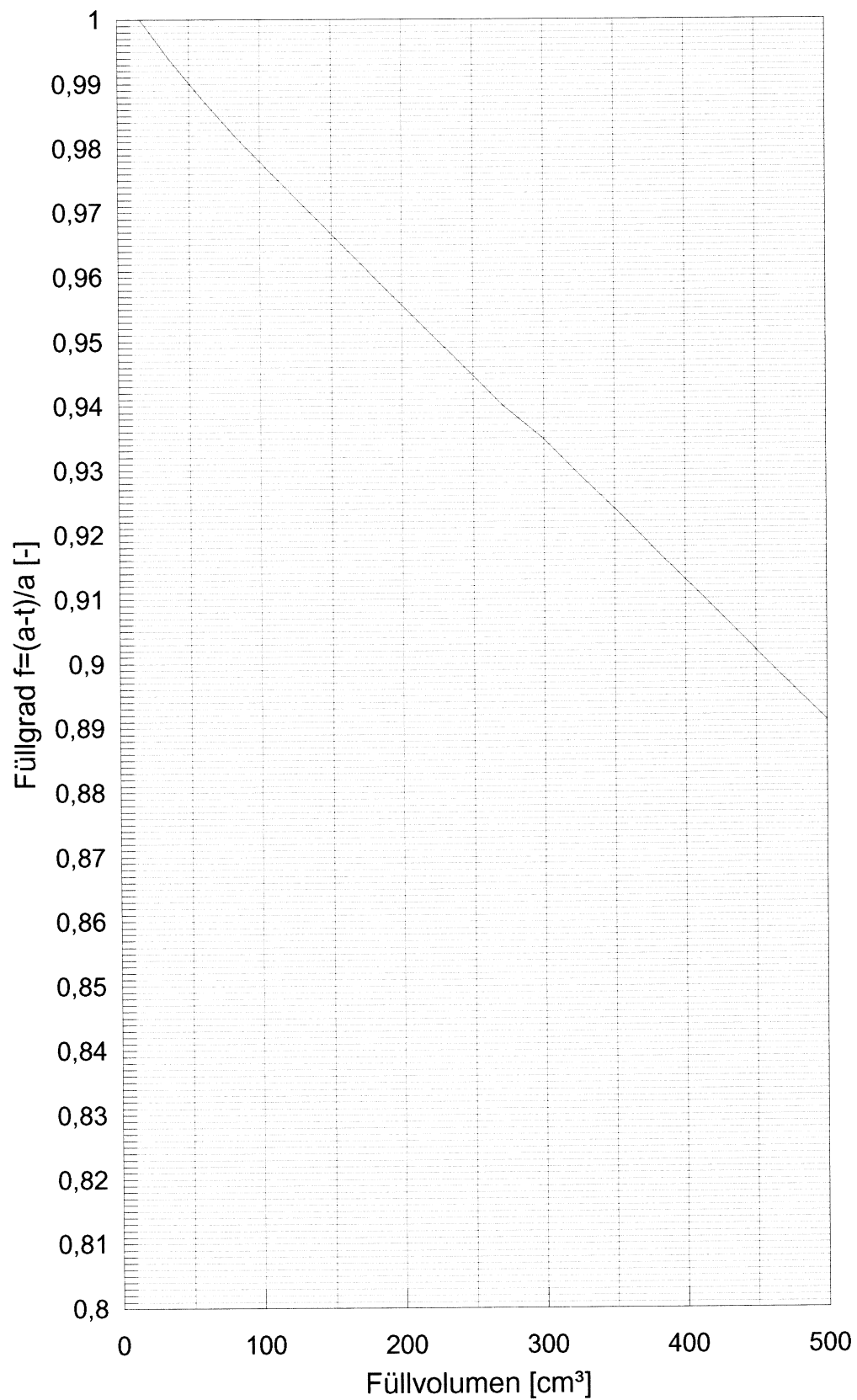
Standardrotor \varnothing 720 mm, Abmessungen (informativ, nicht Teil dieser Arbeit)



- Füllgrad

Wasserring

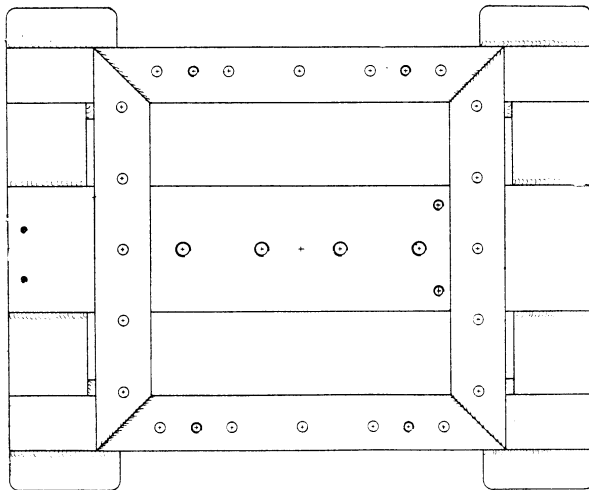
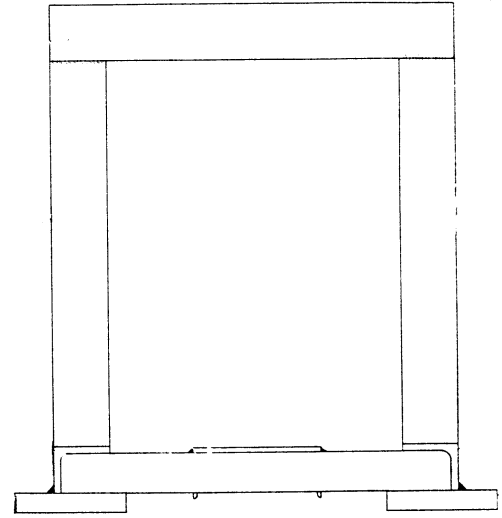
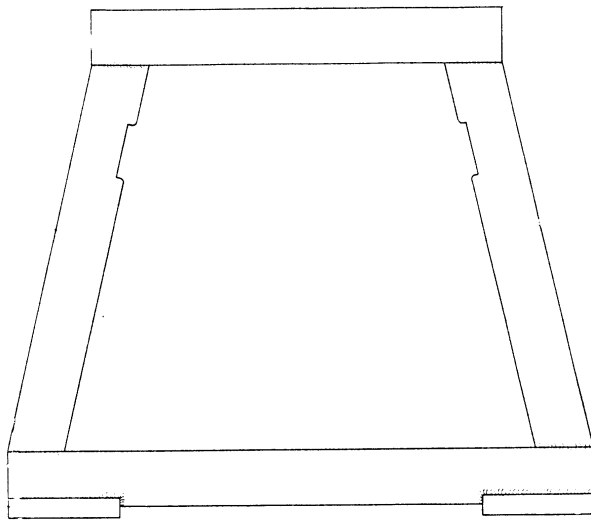
Versuchsrotor \varnothing 336 mm, Zusammenhang zwischen Füllvolumen und Füllgrad (oberer Flüssigkeitsring, „Wasserring“)



- Füllgrad

Ölring

Versuchsrotor \varnothing 336 mm, Zusammenhang zwischen Füllvolumen und Füllgrad (unterer Flüssigkeitsring, „Ölring“)



Versuchsstand, Ansichten Maschinengestell (ohne Abmessungen)

Obere Stabilitätsgrenze [Hz] Versuchsrotor für verschieden
zähe Flüssigkeiten und verschiedene Füllgrade im oberen Ring, ohne innere Dämpfung,
experimentell (Zähigkeiten für 20°C), zu Abbildung 6.2

Volumen/ Füllgrad [cm ³]	Fluoriertes Öl $\rho=1,92$ g/cm ³ $\nu=1100$ cSt	Ø je Füllgrad	Glycerin $\rho=1,22$ g/cm ³ $\nu=110$ cSt	Ø je Füllgrad	Wasser $\rho=1,0$ g/cm ³ $\nu=1$ cSt	Ø je Füllgrad
200	(12,16)		17,33		18,20	
200	(11,11)	(11,53)	17,75	17,59	18,00	18,16
200	(11,33)		17,70		18,27	
400	19,13		20,60		19,70	
400	18,67	19,16	20,45	20,48	19,80	18,77
400	19,40		20,40		19,80	
600	21,60		21,75		21,50	
600	21,80	21,67	21,60	21,75	21,40	21,37
600	21,60		21,90		21,20	
800	23,25		23,00		21,80	
800	23,25	23,16	23,25	23,05	21,80	21,86
800	23,00		22,90		22,00	
1000	24,00		23,95		23,40	
1000	24,00	24,00	23,15	23,56	23,75	23,63
1000	24,00		23,60		23,75	

Obere Stabilitätsgrenze [Hz] Versuchsrotor für verschiedene Wasserfüllungen (Zähigkeit für 20°C) im oberen Ring, ohne innere Dämpfung bei der Zahnstellung mit der größten Amplitude bei kritischer Drehzahl experimentell, zu Abbildung 6.4

Füllvolumen [cm ³]	Wasser $\rho=1,0 \text{ g/cm}^3$ $\nu=1 \text{ cSt}$	Ø je Füllgrad
200	17,7	
200	17,5	17,56
200	17,5	
400	19,8	
400	20,0	19,87
400	19,8	
600	20,8	
600	20,7	20,77
600	20,8	

Obere Stabilitätsgrenze [Hz] Versuchsrotor
für verschiedene Fluorölfüllungen (Zähigkeit für 20°C) im unteren Ring, experimentell,
zu Abbildung 6.5

Füllvolumen [cm ³]	Fluoriertes Öl $\rho=1,92 \text{ g/cm}^3$ $\nu=1100 \text{ cSt}$	Ø je Füllgrad
200	12.62	
200	12,54	12,50
200	12,33	
300	15.33	
300	15,20	15,34
300	15,50	
400	17.00	
400	17,06	17,19
400	17,50	
450	18.00	
450	18,66	18,49
450	18,80	
480	19.40	
480	19,60	19,43
480	19,30	

Obere Stabilitätsgrenze [Hz] Versuchsrotor für verschiedene Wasserfüllungen im Wasserring;
Dämpfungsöl 480 ml (Zähigkeit für 20°C) im unteren Ring, experimentell, zu Abbildung 6.6

Füllvolumen [cm ³]	Wasser $\rho=1,0 \text{ g/cm}^3$ $\nu=1 \text{ cSt}$	Ø je Füllgrad
400	20,20	
400	20,80	20,47
400	20,40	
500	20,20	
500	20,80	20,70
500	21,10	
600	21,20	
600	21,20	21,13
600	21,00	
700	22,00	
700	21,50	21,50
700	21,00	

Stabilitätsgrenzen für verschiedene Fluoröلزähigkeiten, berechnet, zu Abbildung 6.3

Öلزähigkeit [cm ² /s]	Fülltiefe [mm]	Stabilitätsgrenze [Hz]	Eigenmode "Modus"
5	28	18,92	5
	24	18,20	5
	20	17,73	5
	16	17,14	5
	12	16,74	5
	8	16,32	6
	4	16,09	6
10	28	18,34	4
	24	17,83	4
	20	17,16	4
15	28	18,50	4
	24	17,87	4
	20	17,21	4
	16	16,46	4
	12	15,65	6
	8	14,97	6
	4	14,14	6
20	28	18,95	4
	24	18,18	4
	20	17,41	4
	16	16,64	4
	12	15,83	4
	8	14,55	4
	4	13,68	4
30	28	20,32	4
	24	19,51	4
	20	18,64	4
	16	17,66	4
	12	16,59	4
	8	15,28	4
	4	13,68	4
40	28	21,64	4
	24	20,77	4
	20	19,84	4
	16	18,83	4
	12	17,62	4
	8	16,17	4
	4	14,23	4

Stabilitätsgrenzen für verschiedene Silikonölviskositäten, berechnet, zu Abbildung 6.3

Ölzähigkeit [cm ² /s]	Fülltiefe [mm]	Stabilitätsgrenze [Hz]	Eigenmode "Modus"
5	28	20,74	4
	24	19,46	4
	20	18,23	4
	28	20,74	5
	24	19,46	5
	20	18,23	5
	16	17,31	5
	12	16,43	5
	8	15,75	5
	8	15,17	6
	4	15,25	6
10	28	20,57	4
	24	19,41	4
	20	18,22	4
	16	17,28	4
	12	16,25	4
	8	14,40	4
	4	14,61	4
	8	15,17	6
	4	15,25	6
	4	15,25	6
15	28	21,31	4
	24	20,19	4
	20	19,02	4
	16	17,95	4
	12	16,69	4
	8	15,41	4

Maximale Amplituden Spitze-Spitze bei Fanglagerumschaltungen mit verschiedenen Fluorölfüllungen im Öhring, experimentell

Füllvolumen [cm ³]	Maximale Amplitude Spitze- Spitze [μm]	Ø maximale Amplitude je Füllvolumen
200	1150	
200	1240	1138
200	1023	
300	1248	
300	1078	1148
300	1118	
400	1288	
400	292←	588
400	183←	
450	1360	
450	1298	1335
450	1348	
480	1348	
480	1155	1207
480	1118	

Tabelle Zusammenhang Füllgrad – Füllvolumen (oberer Ring Versuchsrotor)

Füllgrad f	Füllvolumen V
0,965	200 ml
0,950	300 ml
0,938	400 ml
0,925	500 ml
0,913	600 ml
0,900	800 ml
0,886	1000 ml